

2021年湖南省株洲市中考数学试卷(参考答案)

一、选择题(本大题共10小题,每小题有且只有一个正确答案,每小题4分,共40分)

1. (4分)若 a 的倒数为2,则 $a=(\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

【解答】解: $\because a$ 的倒数为2,

$$\therefore a = \frac{1}{2}.$$

故选: A.

2. (4分)方程 $\frac{x}{2}-1=2$ 的解是()

- A. $x=2$ B. $x=3$ C. $x=5$ D. $x=6$

【解答】解: $\frac{x}{2}-1=2$,

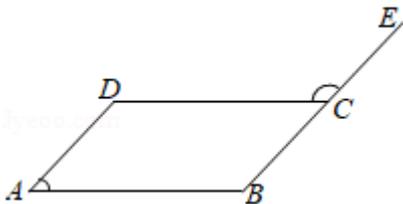
移项,得 $\frac{x}{2}=2+1$,

合并同类项,得 $\frac{x}{2}=3$,

系数化成1,得 $x=6$,

故选: D.

3. (4分)如图所示,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,点 E 在线段 BC 的延长线上,若 $\angle DCE=132^\circ$,则 $\angle A=(\quad)$



- A. 38° B. 48° C. 58° D. 66°

【解答】解: $\because \angle DCE=132^\circ$,

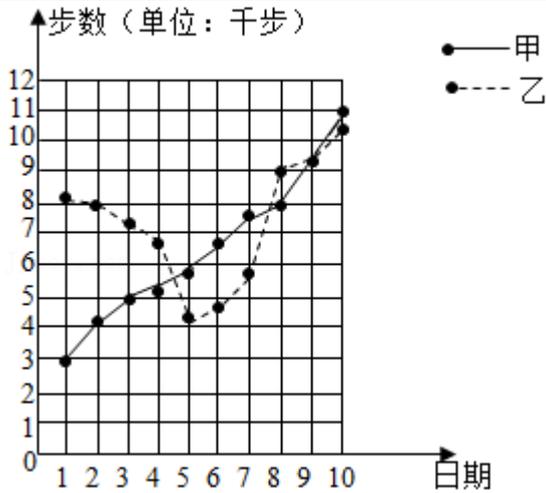
$$\therefore \angle DCB=180^\circ-\angle DCE=180^\circ-132^\circ=48^\circ,$$

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A=\angle DCB=48^\circ,$$

故选: B.

4. (4分)某月1日-10日,甲、乙两人的手机“微信运动”的步数统计图如图所示,则下列错误的结论是()



- A. 1日-10日, 甲的步数逐天增加
- B. 1日-6日, 乙的步数逐天减少
- C. 第9日, 甲、乙两人的步数正好相等
- D. 第11日, 甲的步数不一定比乙的步数多

【解答】解: A. 1日-10日, 甲的步数逐天增加; 故A中结论正确, 不符合题意;
 B. 1日-5日, 乙的步数逐天减少; 6日的步数比5日的步数多, 故B中结论错误, 符合题意;
 C. 第9日, 甲、乙两人的步数正好相等; 故C中结论正确, 不符合题意;
 D. 第11日, 甲的步数不一定比乙的步数多; 故D中结论正确, 不符合题意;

故选: B.

5. (4分) 计算: $-4 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = (\quad)$

- A. $-2\sqrt{2}$
- B. -2
- C. $-\sqrt{2}$
- D. $2\sqrt{2}$

【解答】解: $-4 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = -4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$.

故选: A.

6. (4分) 《九章算术》之“粟米篇”中记载了中国古代的“粟米之法”: “粟率五十, 粳米三十...” (粟指带壳的谷子, 粳米指糙米), 其意为: “50单位的粟, 可换得30单位的粳米...”. 问题: 有3斗的粟 (1斗=10升), 若按照此“粟米之法”, 则可以换得的粳米为()

- A. 1.8升
- B. 16升
- C. 18升
- D. 50升

【解答】解: 根据题意得: 3斗=30升,

设可以换得的粳米为 x 升,

则 $\frac{50}{30} = \frac{30}{x}$,

解得: $x = \frac{30 \times 3}{5} = 18$ (升),

经检验: $x = 18$ 是原分式方程的解,

答: 有 3 斗的粟(1 斗=10 升), 若按照此“粟米之法”, 则可以换得的粳米为 18 升.

故选: C.

7. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ -x+1 > 0 \end{cases}$ 的解集为()

- A. $x < 1$ B. $x \leq 2$ C. $1 < x \leq 2$ D. 无解

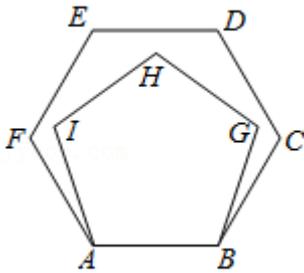
【解答】解: 解不等式 $x-2 \leq 0$, 得: $x \leq 2$,

解不等式 $-x+1 > 0$, 得: $x < 1$,

则不等式组的解集为 $x < 1$.

故选: A.

8. (4 分) 如图所示, 在正六边形 $ABCDEF$ 内, 以 AB 为边作正五边形 $ABGHI$, 则 $\angle FAI =$ ()



- A. 10° B. 12° C. 14° D. 15°

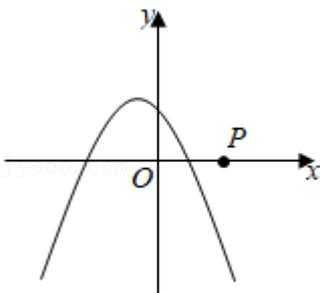
【解答】解: 在正六边形 $ABCDEF$ 内, 正五边形 $ABGHI$ 中, $\angle FAB = 120^\circ$, $\angle IAB = 108^\circ$,

$\therefore \angle FAI = \angle FAB - \angle IAB = 120^\circ - 108^\circ = 12^\circ$,

故选: B.

9. (4 分) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示, 点 P 在 x 轴的正半轴上, 且 $OP = 1$, 设

$M = ac(a+b+c)$, 则 M 的取值范围为()



- A. $M < -1$ B. $-1 < M < 0$ C. $M < 0$ D. $M > 0$

【解答】解：方法一：

$\because OP=1$ ， P 不在抛物线上，

\therefore 当抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，

$x=1$ 时， $y = a + b + c < 0$ ，

当抛物线 $y=0$ 时，得 $ax^2 + bx + c = 0$ ，

由图象知 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ，

$\therefore ac < 0$ ，

$\therefore ac(a + b + c) > 0$ ，

即 $M > 0$ ，

方法二：

\because 抛物线开口向下，

$\therefore a < 0$ ；

\because 与 y 轴的交点在正半轴，

$\therefore c > 0$ ；

由图象观察知，当 $x=1$ 时，函数值为负，

即 $a + b + c < 0$ ，

$\therefore M = ac(a + b + c) > 0$ 。

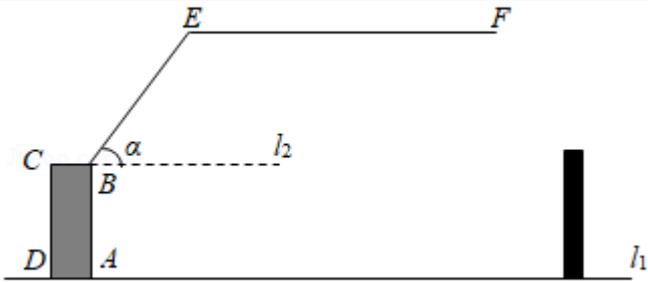
故选：D。

10. (4分) 某限高曲臂道路闸口如图所示， AB 垂直地面 l_1 于点 A ， BE 与水平线 l_2 的夹角为 $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$ ，

$EF \parallel l_1 \parallel l_2$ ，若 $AB=1.4$ 米， $BE=2$ 米，车辆的高度为 h (单位：米)，不考虑闸口与车辆的宽度：

- ①当 $\alpha = 90^\circ$ 时， h 小于 3.3 米的车辆均可以通过该闸口；
- ②当 $\alpha = 45^\circ$ 时， h 等于 2.9 米的车辆不可以通过该闸口；
- ③当 $\alpha = 60^\circ$ 时， h 等于 3.1 米的车辆不可以通过该闸口。

则上述说法正确的个数为()



- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【解答】解：由题知，

限高曲臂道路闸口高度为： $1.4 + 2 \times \sin \alpha$ ，

①当 $\alpha = 90^\circ$ 时， $h < (1.4 + 2)$ 米，即 $h < 3.4$ 米即可通过该闸口，

故①正确；

②当 $\alpha = 45^\circ$ 时， $h < (1.4 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2})$ 米，即 $h < 1.4 + \sqrt{2}$ 米即可通过该闸口，

$$\because 2.9 > 1.4 + \sqrt{2},$$

$\therefore h$ 等于 2.9 米的车辆不可以通过该闸口，

故②正确；

③当 $\alpha = 60^\circ$ 时， $h < (1.4 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2})$ 米，即 $h < 1.4 + \sqrt{3}$ 米即可通过该闸口，

$$\because 3.1 < 1.4 + \sqrt{3},$$

$\therefore h$ 等于 3.1 米的车辆可以通过该闸口，

故③不正确；

故选：C。

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

11. （4 分）计算： $2a^2 \cdot a^3 = \underline{2a^5}$ 。

【解答】解： $2a^2 \cdot a^3 = 2(a^2 \cdot a^3) = 2a^5$ 。

故答案为 $2a^5$ 。

12. （4 分）因式分解： $6x^2 - 4xy = \underline{2x(3x - 2y)}$ 。

【解答】解： $6x^2 - 4xy = 2x(3x - 2y)$ 。

故答案为： $2x(3x - 2y)$ 。

13. （4 分）据报道，2021 年全国高考报名人数为 1078 万，将 1078 万用科学记数法表示为 1.078×10^n ，则 $n = \underline{7}$ 。

【解答】解：1078 万 = 10780000 = 1.078×10^7 ，

则 $n = 7$ 。

故答案为：7。

14. (4 分) 抛掷一枚质地均匀的硬币两次，则两次都是“正面朝上”的概率是 $\frac{1}{4}$ 。

【解答】解：画树状图如下：

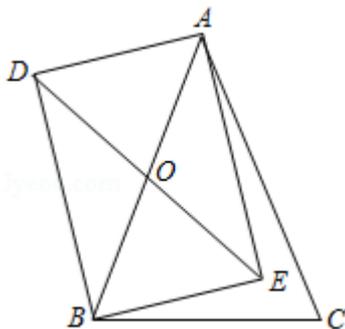


共有 4 种等可能的结果数，其中两次都是“正面朝上”的结果有 1 种，

\therefore 两次都是“正面朝上”的概率 = $\frac{1}{4}$ 。

故答案为： $\frac{1}{4}$ 。

15. (4 分) 如图所示，线段 BC 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边，矩形 $ADBE$ 的对角线 AB 与 DE 交于点 O ，若 $OD = 2$ ，则 $AC = 4$ 。



【解答】解： \because 四边形 $ADBE$ 是矩形，

$\therefore AB = DE$ ， $AO = BO$ ， $DO = OE$ ，

$\therefore AB = DE = 2OD = 4$ ，

$\because AB = AC$ ，

$\therefore AC = 4$ ，

故答案为 4。

16. (4 分) 中药是以我国传统医药理论为指导，经过采集、炮制、制剂而得到的药物。在一个时间段，某中药房的黄芪、焦山楂、当归三种中药的销售单价和销售额情况如表：

中药	黄芪	焦山楂	当归
销售单价(单位:元 /千克)	80	60	90
销售额(单位:元)	120	120	360

则在这个时间段,该中药房的这三种中药的平均销售量为 2.5 千克.

【解答】解:黄芪的销售量为 $120 \div 80 = 1.5$ (千克),
焦山楂的销售量为 $120 \div 60 = 2$ (千克),
当归的销售量为 $360 \div 90 = 4$ (千克).

该中药房的这三种中药的平均销售量为 $\frac{1.5+2+4}{3} = 2.5$ (千克).

故答案为: 2.5.

17. (4分)点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_1+1, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的两点,满足:当 $x_1 > 0$ 时,均有 $y_1 < y_2$, 则 k 的取值范围是 $k < 0$.

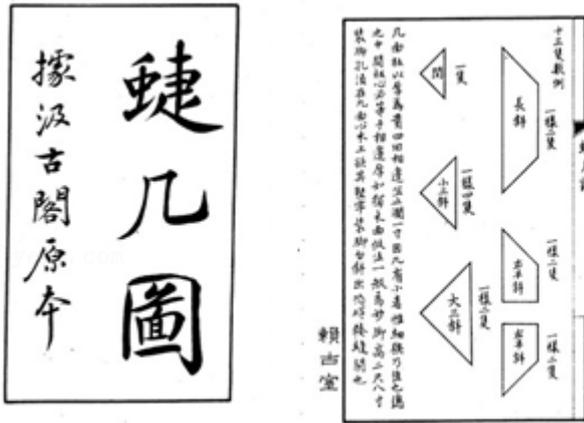
【解答】解: \because 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_1+1, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的两点,
又 $\because 0 < x_1 < x_1+1$ 时, $y_1 < y_2$,

\therefore 函数图象在二四象限,

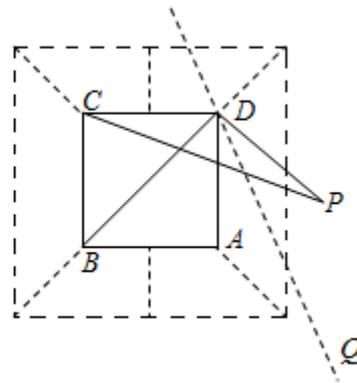
$\therefore k < 0$,

故答案为 $k < 0$.

18. (4分)《蝶几图》是明朝人戈汕所作的一部组合家具的设计图(“**𧈧**”为“𧈧”,同“蝶”),它的基本组件为斜角形,包括长斜两只、右半斜两只、左半斜两只、闰一只、小三斜四只、大三斜两只,共十三只(图①中的“样”和“隻”为“样”和“只”).图②为某蝶几设计图,其中 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 为“大三斜”组件(“一样二隻”的大三斜组件为两个全等的等腰直角三角形),已知某人位于点 P 处,点 P 与点 A 关于直线 DQ 对称,连接 CP 、 DP . 若 $\angle ADQ = 24^\circ$, 则 $\angle DCP =$ 21 度.



图①



图②

【解答】解：∵点P与点A关于直线DQ对称， $\angle ADQ = 24^\circ$ ，

∴ $\angle PDQ = \angle ADQ = 24^\circ$ ， $AD = DP$ ，

∵ $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 为两个全等的等腰直角三角形，

∴ $\angle CDB = \angle ADB = 45^\circ$ ， $CD = AD$ ，

∴ $\angle CDP = \angle CDB + \angle ADB + \angle PDQ + \angle ADQ = 138^\circ$ ，

∵ $AD = DP$ ， $CD = AD$ ，

∴ $CD = DP$ ，即 $\triangle DCP$ 是等腰三角形，

∴ $\angle DCP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CDP) = 21^\circ$ 。

故答案为：21。

三、解答题（本大题共8小题，共78分）

19. （6分）计算： $|-2| + \sqrt{3} \sin 60^\circ - 2^{-1}$ 。

【解答】解：原式 $= 2 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$= 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

$= 3$ 。

20. （8分）先化简，再求值： $\frac{2x}{x^2-4} \cdot (1 - \frac{2}{x}) - \frac{3}{x+2}$ ，其中 $x = \sqrt{2} - 2$ 。

【解答】解：原式 $= \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{x} - \frac{3}{x+2}$

$= \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+2}$

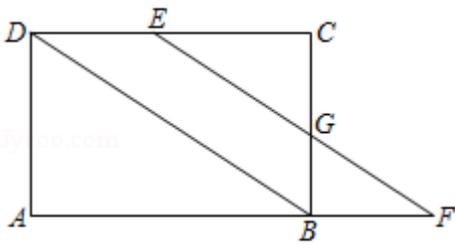
$= -\frac{1}{x+2}$ ，

当 $x = \sqrt{2} - 2$ 时,

$$\text{原式} = -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}-2+2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

21. (8分) 如图所示, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在线段 CD 上, 点 F 在线段 AB 的延长线上, 连接 EF 交线段 BC 于点 G , 连接 BD , 若 $DE = BF = 2$.

- (1) 求证: 四边形 $BFED$ 是平行四边形;
- (2) 若 $\tan \angle ABD = \frac{2}{3}$, 求线段 BG 的长度.



【解答】 证明: (1) \because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore DC \parallel AB,$$

又 $\because DE = BF$,

\therefore 四边形 $DEFB$ 是平行四边形;

(2) \because 四边形 $DEFB$ 是平行四边形,

$$\therefore DB \parallel EF,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle F,$$

$$\therefore \tan \angle ABD = \tan F = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BG}{BF} = \frac{2}{3},$$

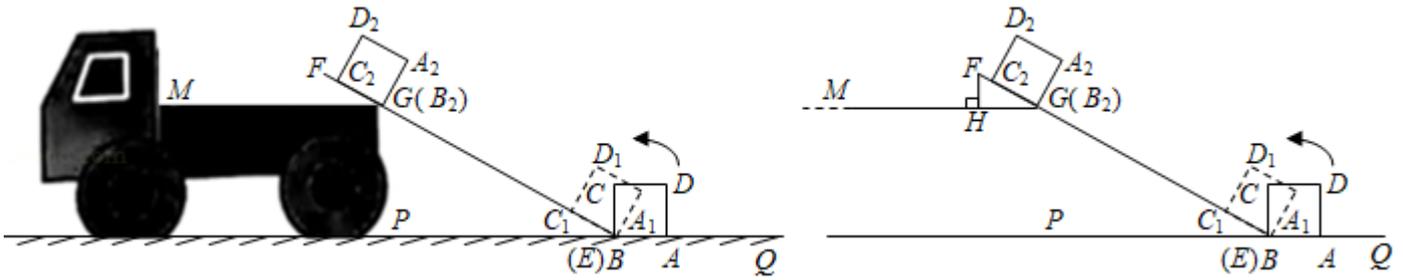
又 $\because BF = 2$,

$$\therefore BG = \frac{4}{3}.$$

22. (10分) 将一物体 (视为边长为 $\frac{2}{\pi}$ 米的正方形 $ABCD$) 从地面 PQ 上挪到货车车厢内. 如图所示, 刚开始点 B 与斜面 EF 上的点 E 重合, 先将该物体绕点 B (E) 按逆时针方向旋转至正方形 $A_1BC_1D_1$ 的位置, 再将其沿 EF 方向平移至正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的位置 (此时点 B_2 与点 G 重合), 最后将物体移到车厢平台面 MG 上. 已知 $MG \parallel PQ$, $\angle FBP = 30^\circ$, 过点 F 作 $FH \perp MG$ 于点 H , $FH = \frac{1}{3}$ 米, $EF = 4$ 米.

- (1) 求线段 FG 的长度;

(2) 求在此过程中点 A 运动至点 A₂ 所经过的路程.



【解答】解: (1) $\because GM \parallel PA$,

$$\therefore \angle FGH = \angle FBP = 30^\circ,$$

$$\because FH \perp GM,$$

$$\therefore \angle FHG = 90^\circ,$$

$$\therefore FG = 2FH = \frac{2}{3} \text{ (米)}.$$

$$(2) \because EF = 4 \text{ 米}, FG = \frac{2}{3} \text{ 米}.$$

$$\therefore EG = EF - FG = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ (米)},$$

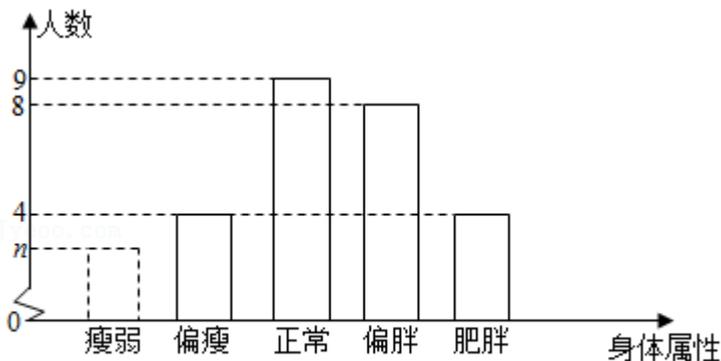
$$\because \angle ABA_1 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, BA = \frac{2}{\pi} \text{ 米},$$

$$\therefore \text{点 A 运动至点 } A_2 \text{ 所经过的路程} = \frac{60 \cdot \pi \cdot \frac{2}{\pi}}{180} + \frac{10}{3} = 4 \text{ (米)}.$$

23. (10分) 目前, 国际上常用身体质量指数“BMI”作为衡量人体健康状况的一个指标, 其计算公式:

$$BMI = \frac{G}{h^2} \text{ (G 表示体重, 单位: 千克; h 表示身高, 单位: 米)}. \text{ 已知某区域成人的 BMI 数值标准为: } BMI < 16$$

为瘦弱 (不健康); $16 \leq BMI < 18.5$ 为偏瘦; $18.5 \leq BMI < 24$ 为正常; $24 \leq BMI < 28$ 为偏胖; $BMI \geq 28$ 为肥胖 (不健康).



(女性身体属性与人数统计图)

某研究人员从该区域的一体检中心随机抽取 55 名成人的体重、身高数据组成一个样本，计算每名成人的 BMI 数值后统计：

（男性身体属性与人数统计表）

身体属性	人数
瘦弱	2
偏瘦	2
正常	11
偏胖	9
肥胖	m

（1）求这个样本中身体属性为“正常”的人数；

（2）某女性的体重为 51.2 千克，身高为 1.6 米，求该女性的 BMI 数值；

（3）当 $m \geq 3$ 且 $n \geq 2$ (m 、 n 为正整数) 时，求这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比值。

【解答】解：（1） $9+11=20$ （人），

答：这个样本中身体属性为“正常”的人数是 20；

$$(2) \quad BMI = \frac{G}{h^2} = \frac{51.2}{1.6^2} = 20,$$

答：该女性的 BMI 数值为 20；

（3）当 $m \geq 3$ 且 $n \geq 2$ (m 、 n 为正整数) 时，

这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数： $2+m$ ，

这个样本中身体属性为“不健康”的女性人数： $n+4$ ，

$$\therefore 2+2+11+9+m+n+4+9+8+4=55,$$

$$\therefore m+n=6,$$

$\therefore m \geq 3$ 且 $n \geq 2$ (m 、 n 为正整数)，

$$\therefore m=3, \quad n=3 \text{ 或 } m=4, \quad n=2,$$

$m=3$ 时， $n=3$ ，这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比

$$\text{值为 } \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7};$$

$m=4$ 时， $n=2$ ，这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比

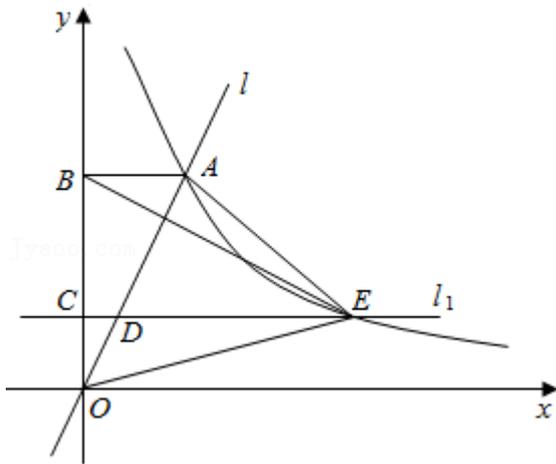
$$\text{值为 } \frac{2+4}{2+4} = 1.$$

答: 这个样本中身体属性为“不健康”的男性人数与身体属性为“不健康”的女性人数的比值为 $\frac{5}{7}$ 或 1.

24. (10 分) 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = 2x$ 的图象 l 与函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象(记为 Γ) 交于点 A , 过点 A 作 $AB \perp y$ 轴于点 B , 且 $AB = 1$, 点 C 在线段 OB 上(不含端点), 且 $OC = t$, 过点 C 作直线 $l_1 \parallel x$ 轴, 交 l 于点 D , 交图象 Γ 于点 E .

(1) 求 k 的值, 并且用含 t 的式子表示点 D 的横坐标;

(2) 连接 OE 、 BE 、 AE , 记 $\triangle OBE$ 、 $\triangle ADE$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 , 设 $U = S_1 - S_2$, 求 U 的最大值.



【解答】解: (1) $\because AB \perp y$ 轴, 且 $AB = 1$,

\therefore 点 A 的横坐标为 1,

\because 点 A 在直线 $y = 2x$ 上,

$\therefore y = 2 \times 1 = 2$,

\therefore 点 $A(1, 2)$,

$\therefore B(0, 2)$,

\because 点 A 在函数 $y = \frac{k}{x}$ 上,

$\therefore k = 1 \times 2 = 2$,

$\because OC = t$,

$\therefore C(0, t)$,

$\because CE \parallel x$ 轴,

\therefore 点 D 的纵坐标为 t ,

\because 点 D 在直线 $y = 2x$ 上, $t = 2x$,

$\therefore x = \frac{1}{2}t$,

∴ 点 D 的横坐标为 $\frac{1}{2}t$;

(2) 由 (1) 知, $k=2$,

∴ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{2}{x}$,

由 (1) 知, $CE \parallel x$ 轴,

∴ $C(0, t)$,

∴ 点 E 的纵坐标为 t ,

∴ 点 E 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上,

∴ $x = \frac{2}{t}$,

∴ $E(\frac{2}{t}, t)$,

∴ $CE = \frac{2}{t}$,

∴ $B(0, 2)$,

∴ $OB = 2$.

∴ $S_1 = S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2}OB \cdot CE = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{t} = \frac{2}{t}$

由 (1) 知, $A(1, 2)$, $D(\frac{1}{2}t, t)$,

∴ $DE = \frac{2}{t} - \frac{1}{2}t$,

∴ $CE \parallel x$ 轴,

∴ $S_2 = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}DE(y_A - y_D) = \frac{1}{2}(\frac{2}{t} - \frac{1}{2}t)(2 - t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{2}{t} - 1$,

∴ $U = S_1 - S_2 = \frac{2}{t} - (\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{2}{t} - 1) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 1 = -\frac{1}{4}(t-1)^2 + \frac{5}{4}$,

∴ 点 C 在线段 OB 上 (不含端点),

∴ $0 < t < 2$,

∴ 当 $t=1$ 时, U 最大 $= \frac{5}{4}$.

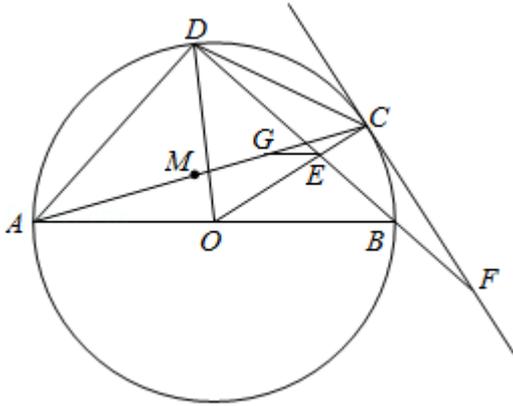
25. (13分) 如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 、 D 是 $\odot O$ 上不同的两点, 直线 BD 交线段 OC 于点 E 、交过点 C 的直线 CF 于点 F , 若 $OC = 3CE$, 且 $9(EF^2 - CF^2) = OC^2$.

(1) 求证: 直线 CF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 OD 、 AD 、 AC 、 DC ，若 $\angle COD = 2\angle BOC$ 。

①求证: $\triangle ACD \sim \triangle OBE$;

②过点 E 作 $EG \parallel AB$ ，交线段 AC 于点 G ，点 M 为线段 AC 的中点，若 $AD = 4$ ，求线段 MG 的长度。



【解答】 (1) 证明: $\because 9(EF^2 - CF^2) = OC^2$, $OC = 3OE$,

$$\therefore 9(EF^2 - CF^2) = 9EC^2,$$

$$\therefore EF^2 = EC^2 + CF^2,$$

$$\therefore \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \perp CF,$$

\therefore 直线 CF 是 $\odot O$ 的切线.

(2) ①证明: $\because \angle COD = 2\angle DAC$, $\angle COD = 2\angle BOC$,

$$\therefore \angle DAC = \angle EOB,$$

$$\because \angle DCA = \angle EBO,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle OBE.$$

②解: $\because OB = OC$, $OC = 3EC$,

$$\therefore OB : OE = 3 : 2,$$

$$\because \triangle ACD \sim \triangle OBE,$$

$$\therefore \frac{AC}{OB} = \frac{AD}{OE},$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{OB}{OE} = \frac{3}{2},$$

$$\because AD = 4,$$

$\therefore AC = 6,$

$\because M$ 是 AC 的中点,

$\therefore CM = MA = 3,$

$\because EG \parallel OA,$

$\therefore \frac{CG}{CA} = \frac{CE}{CO} = \frac{1}{3},$

$\therefore CG = 2,$

$\therefore MG = CM - CG = 3 - 2 = 1,$

即线段 MG 的长度为 1.

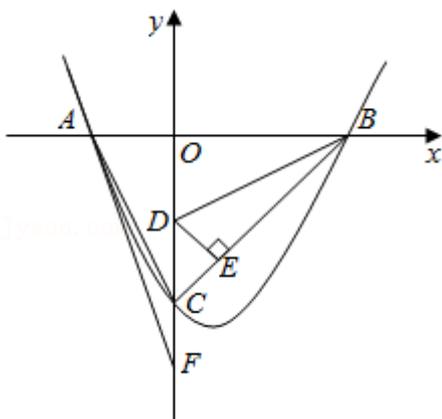
26. (13分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$.

(1) 若 $a = \frac{1}{2}, b = c = -2$, 求方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的判别式的值;

(2) 如图所示, 该二次函数的图象与 x 轴交于点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 且 $x_1 < 0 < x_2$, 与 y 轴的负半轴交于点 C , 点 D 在线段 OC 上, 连接 AC, BD , 满足 $\angle ACO = \angle ABD, -\frac{b}{a} + c = x_1$.

① 求证: $\triangle AOC \cong \triangle DOB$;

② 连接 BC , 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 点 $F(0, x_1 - x_2)$ 在 y 轴的负半轴上, 连接 AF , 且 $\angle ACO = \angle CAF + \angle CBD$, 求 $\frac{c}{x_1}$ 的值.



【解答】 解: (1) 当 $a = \frac{1}{2}, b = c = -2$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-2) = 8;$

(2) ① 设 $ax^2 + bx + c = 0$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a},$

则 $\frac{b}{a} + x_1 = -x_2 = c$, 即 $x_2 = -c = OC$, $x_1 = \frac{c}{a} \div x_2 = -\frac{1}{a}$,

$\therefore OB = x_2 = CO$, $\angle ACO = \angle ABD$, $\angle COA = \angle BOD = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle DOB(ASA)$;

② $\therefore \angle OCA = \angle CAF + \angle CFA$, $\angle ACO = \angle CAF + \angle CBD$,

$\therefore \angle CBD = \angle AFO$,

$\therefore OB = OC$, 故 $\angle OCB = 45^\circ$,

$\therefore CD = OC - OD = OC - OA = -c - \frac{1}{a}$,

则 $DE = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = -\frac{\sqrt{2}}{2} (c + \frac{1}{a}) = CE$,

则 $BE = BC - CE = \sqrt{2}OB - CE = -\sqrt{2}c + \frac{\sqrt{2}}{2} (-c + \frac{1}{a})$,

则 $\tan \angle CBD = \frac{DE}{BE} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} (c + \frac{1}{a})}{-\sqrt{2}c + \frac{\sqrt{2}}{2} (-c + \frac{1}{a})} = \frac{c + \frac{1}{a}}{c - \frac{1}{a}}$,

而 $\tan \angle AFO = \frac{AO}{FO} = \frac{-x_1}{-(x_1 - x_2)} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - c} = \tan \angle CBD = \frac{c + \frac{1}{a}}{c - \frac{1}{a}}$,

解得 $ca = -2$ 或 $ca = 1$,

又 \therefore 抛物线开口向上, 与 y 轴交于负半轴,

$\therefore a > 0, c < 0$,

$\therefore ac < 0$, 即 $ca = 1$ (舍去),

而 $\frac{c}{x_1} = \frac{c}{-\frac{1}{a}} = -ac = 2$,

故 $\frac{c}{x_1}$ 的值为 2.

关注“数学吧”公众号, 海量免费试卷下载!

