

2020年湖南省株洲市中考数学试卷(参考答案)

一、选择题(每小题有且只有一个正确答案, 本题共10小题, 每小题4分, 共40分)

1. (4分) a 的相反数为 -3 , 则 a 等于()

- A. -3 B. 3 C. ± 3 D. $\frac{1}{3}$

【解答】解: 因为 3 的相反数是 -3 , 所以 $a=3$.

故选: B .

2. (4分) 下列运算正确的是()

- A. $a \cdot a^3 = a^4$ B. $2a - a = 2$ C. $(a^2)^5 = a^7$ D. $(-3b)^2 = 6b^2$

【解答】解: 选项 A , 根据同底数幂的乘法法则可得 $a \cdot a^3 = a^4$, 选项 A 正确;

选项 B , 根据合并同类项法则可得 $2a - a = a$, 选项 B 错误;

选项 C , 根据幂的乘方的运算法则可得 $(a^2)^5 = a^{10}$, 选项 C 错误;

选项 D , 根据积的乘方的运算法则可得 $(-3b)^2 = 9b^2$, 选项 D 错误.

故选: A .

3. (4分) 一个不透明的盒子中装有4个形状、大小质地完全相同的小球, 这些小球上分别标有数字 -1 、 0 、 2 和 3 . 从中随机地摸取一个小球, 则这个小球所标数字是正数的概率为()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

【解答】解: 根据题意可得: 在4个小球中, 其中标有正数的有2个, 分别是2, 3,

故从中随机地摸取一个小球, 则这个小球所标数字是正数的概率为: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

故选: C .

4. (4分) 一实验室检测 A 、 B 、 C 、 D 四个元件的质量(单位: 克), 超过标准质量的克数记为正数, 不足标准质量的克数记为负数, 结果如图所示, 其中最接近标准质量的元件是()



【解答】解: $\because |1.2| = 1.2$, $|-2.3| = 2.3$, $|+0.9| = 0.9$, $|-0.8| = 0.8$,

又 $\because 0.8 < 0.9 < 1.2 < 2.3$,

\therefore 从轻重的角度看, 最接近标准的是选项 D 中的元件.

故选: D .

5. (4分) 数据 12、15、18、17、10、19 的中位数为()

- A. 14 B. 15 C. 16 D. 17

【解答】解: 把这组数据从小到大排列为: 10, 12, 15, 17, 18, 19, 则这组数据的中位数是 $\frac{15+17}{2}=16$.

故选: C.

6. (4分) 下列哪个数是不等式 $2(x-1)+3 < 0$ 的一个解? ()

- A. -3 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2

【解答】解: 解不等式 $2(x-1)+3 < 0$, 得 $x < -\frac{1}{2}$,

因为只有 $-3 < -\frac{1}{2}$, 所以只有 -3 是不等式 $2(x-1)+3 < 0$ 的一个解,

故选: A.

7. (4分) 在平面直角坐标系中, 点 $A(a,2)$ 在第二象限内, 则 a 的取值可以是()

- A. 1 B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 4 或 -4

【解答】解: \because 点 $A(a,2)$ 是第二象限内的点,

$\therefore a < 0$,

四个选项中符合题意的数是 $-\frac{3}{2}$,

故选: B.

8. (4分) 下列不等式错误的是()

- A. $-2 < -1$ B. $\pi < \sqrt{17}$ C. $\frac{5}{2} > \sqrt{10}$ D. $\frac{1}{3} > 0.3$

【解答】解: A、根据两个负数绝对值大的反而小可得 $-2 < -1$, 原不等式正确, 故此选项不符合题意;

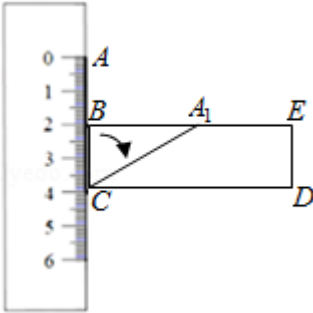
B、由 $3 < \pi < 4$, $4 < \sqrt{17} < 5$ 可得 $\pi < \sqrt{17}$, 原不等式正确, 故此选项不符合题意;

C、 $\because \sqrt{10} > 3$, $\frac{5}{2} < 3$, 可得 $\frac{5}{2} > \sqrt{10}$, 原不等式错误, 故此选项符合题意;

D、由 $\frac{1}{3} = 0.3333\dots$, 可得 $\frac{1}{3} > 0.3$, 原不等式正确, 故此选项不符合题意.

故选: C.

9. (4分) 如图所示, 点 A、B、C 对应的刻度分别为 0、2、4、将线段 CA 绕点 C 按顺时针方向旋转, 当点 A 首次落在矩形 BCDE 的边 BE 上时, 记为点 A_1 , 则此时线段 CA 扫过的图形的面积为()



A. 4π

B. 6

C. $4\sqrt{3}$

D. $\frac{8}{3}\pi$

【解答】解：由题意，知 $AC=4$ ， $BC=4-2=2$ ， $\angle A_1BC=90^\circ$ 。

由旋转的性质，得 $A_1C=AC=4$ 。

在 $Rt \triangle A_1BC$ 中， $\cos \angle ACA_1 = \frac{BC}{A_1C} = \frac{1}{2}$ 。

$\therefore \angle ACA_1 = 60^\circ$ 。

\therefore 扇形 ACA_1 的面积为 $\frac{60 \times \pi \times 4^2}{360} = \frac{8}{3}\pi$ 。

即线段 CA 扫过的图形的面积为 $\frac{8}{3}\pi$ 。

故选：D。

10. (4分) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ，若 $ab<0$ ， $a-b^2>0$ ，点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 在该二次函数的图象上，其中 $x_1 < x_2$ ， $x_1+x_2=0$ ，则()

A. $y_1 = -y_2$

B. $y_1 > y_2$

C. $y_1 < y_2$

D. y_1 、 y_2 的大小无法确定

【解答】解： $\because a-b^2 > 0$ ， $b^2 \geq 0$ ，

$\therefore a > 0$ 。

又 $\because ab < 0$ ，

$\therefore b < 0$ ，

$\because x_1 < x_2$ ， $x_1+x_2=0$ ，

$\therefore x_2 = -x_1$ ， $x_1 < 0$ 。

\because 点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 在该二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上，

$$\therefore y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \quad y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c = ax_1^2 - bx_1 + c.$$

$$\therefore y_1 - y_2 = 2bx_1 > 0.$$

$$\therefore y_1 > y_2.$$

故选：B.

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

11. （4 分）关于 x 的方程 $3x - 8 = x$ 的解为 $x = \underline{4}$.

【解答】解：方程 $3x - 8 = x$,

移项，得 $3x - x = 8$,

合并同类项，得 $2x = 8$.

解得 $x = 4$.

故答案为：4.

12. （4 分）因式分解： $2a^2 - 12a = \underline{2a(a - 6)}$.

【解答】解： $2a^2 - 12a = 2a(a - 6)$.

故答案为： $2a(a - 6)$.

13. （4 分）计算 $\frac{\sqrt{2}}{3} \times (\sqrt{8} + \sqrt{2})$ 的结果是 $\underline{2}$.

【解答】解：原式 $= \frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{8} + \frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2 \times 8}}{3} + \frac{\sqrt{2 \times 2}}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$.

故答案是：2.

14. （4 分）王老师对本班 40 个学生所穿校服尺码的数据统计如下：

尺码	S	M	L	XL	XXL	XXXL
频率	0.05	0.1	0.2	0.325	0.3	0.025

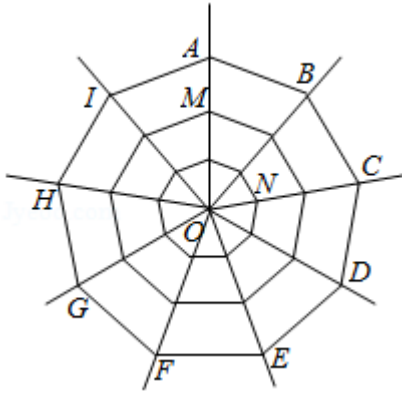
则该班学生所穿校服尺码为“L”的人数有 $\underline{8}$ 个.

【解答】解：由表可知尺码 L 的频率为 0.2，又因为班级总人数为 40，

所以该班学生所穿校服尺码为“L”的人数有 $40 \times 0.2 = 8$.

故答案是：8.

15. （4 分）一个蜘蛛网如图所示，若多边形 $ABCDEFGHI$ 为正九边形，其中心点为点 O ，点 M 、 N 分别在射线 OA 、 OC 上，则 $\angle MON = \underline{80}$ 度.



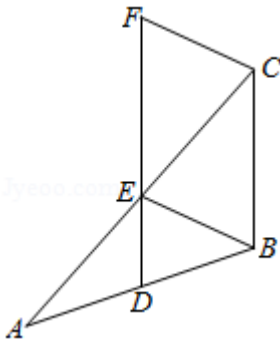
【解答】解：根据正多边形性质得，中心角为：

$$\angle AOB = 360^\circ \div 9 = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle MON = 2\angle AOB = 80^\circ.$$

故答案为：80.

16. (4分) 如图所示，点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 的中点，连接 BE ，过点 C 作 $CF \parallel BE$ ，交 DE 的延长线于点 F ，若 $EF = 3$ ，则 DE 的长为 $\frac{3}{2}$ 。



【解答】解：∵ D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 的中点，

∴ DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE \parallel BC, \quad DE = \frac{1}{2}BC,$$

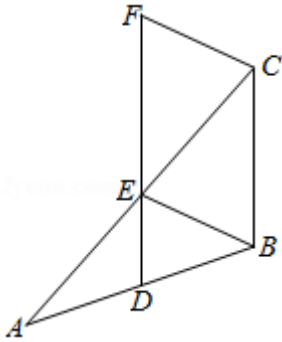
∵ $CF \parallel BE$,

∴ 四边形 $BCFE$ 为平行四边形，

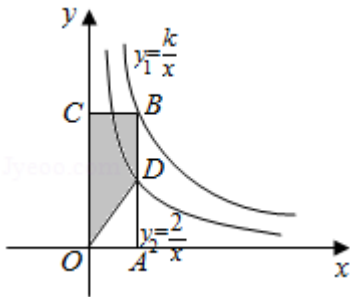
$$\therefore BC = EF = 3,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}.$$

故答案为： $\frac{3}{2}$ 。



17. (4分) 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 四边形 $OABC$ 为矩形, 点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上, 点 B 在函数 $y_1 = \frac{k}{x} (x > 0, k \text{ 为常数且 } k > 2)$ 的图象上, 边 AB 与函数 $y_2 = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 D , 则阴影部分 $ODBC$ 的面积为 $\underline{k-1}$. (结果用含 k 的式子表示)



【解答】 解: $\because D$ 是反比例函数 $y_2 = \frac{2}{x} (x > 0)$ 图象上一点

\therefore 根据反比例函数 k 的几何意义可知: $\triangle AOD$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

\because 点 B 在函数 $y_1 = \frac{k}{x} (x > 0, k \text{ 为常数且 } k > 2)$ 的图象上, 四边形 $OABC$ 为矩形,

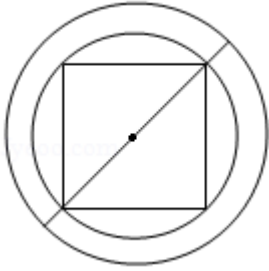
\therefore 根据反比例函数 k 的几何意义可知: 矩形 $ABCO$ 的面积为 k .

\therefore 阴影部分 $ODBC$ 的面积 = 矩形 $ABCO$ 的面积 - $\triangle AOD$ 的面积 = $k - 1$.

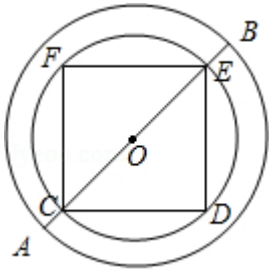
故答案为: $k - 1$.

18. (4分) 据《汉书律历志》记载: “量者, 龠(yuè)、合、升、斗、斛(hú)也” 斛是中国古代的一种量器, “斛底, 方而圆(huán)其外, 旁有庀(tiāo)焉”. 意思是说: “斛的底面为: 正方形外接一个圆, 此圆外是一个同心圆”, 如图所示.

问题: 现有一斛, 其底面的外圆直径为两尺五寸 (即 2.5 尺), “庀旁” 为两寸五分 (即两同心圆的外圆与内圆的半径之差为 0.25 尺), 则此斛底面的正方形的周长为 $\underline{4\sqrt{2}}$ 尺. (结果用最简根式表示)



【解答】解: 如图,



\therefore 四边形 $CDEF$ 为正方形,

$\therefore \angle D = 90^\circ, CD = DE,$

$\therefore CE$ 为直径, $\angle ECD = 45^\circ,$

由题意得 $AB = 2.5,$

$\therefore CE = 2.5 - 0.25 \times 2 = 2,$

$\therefore CD = CE \cdot \cos \angle ECD = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$

\therefore 正方形 $CDEF$ 周长为 $4\sqrt{2}$ 尺.

故答案为: $4\sqrt{2}.$

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 78 分)

19. 计算: $(\frac{1}{4})^{-1} + |-1| - \sqrt{3} \tan 60^\circ.$

【解答】解: 原式 $= 4 + 1 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4 + 1 - 3 = 2.$

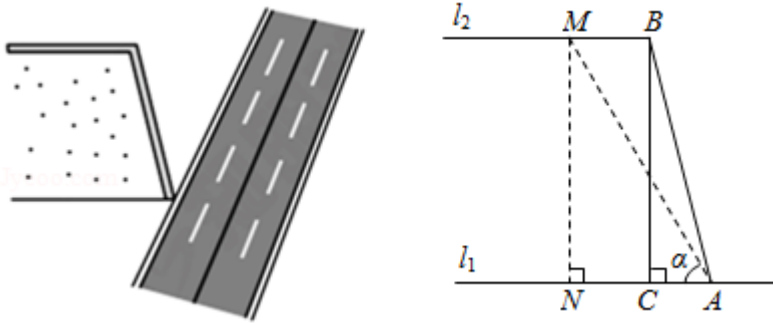
20. 先化简, 再求值: $(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}) \cdot \frac{y}{x+y} - 1,$ 其中 $x = \sqrt{2}, y = 2.$

【解答】解: 原式 $= \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{y}{x+y} - 1 = \frac{(x+y)(x-y)}{xy} \cdot \frac{y}{x+y} - 1 = \frac{x-y}{x} - 1 = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x},$

当 $x = \sqrt{2}, y = 2,$ 原式 $= -\sqrt{2}.$

21. 某高速公路管理部门工作人员在对某段高速公路进行安全巡检过程中, 发现该高速公路旁的一斜坡存在落石隐患. 该斜坡横断面示意图如图所示, 水平线 $l_1 // l_2,$ 点 $A、B$ 分别在 $l_1、l_2$ 上, 斜坡 AB 的长为 18

米, 过点 B 作 $BC \perp l_1$ 于点 C , 且线段 AC 的长为 $2\sqrt{6}$ 米.



(1) 求该斜坡的坡高 BC ; (结果用最简根式表示)

(2) 为降低落石风险, 该管理部门计划对该斜坡进行改造, 改造后的斜坡坡角 α 为 60° , 过点 M 作 $MN \perp l_1$ 于点 N , 求改造后的斜坡长度比改造前的斜坡长度增加了多少米?

【解答】解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{324 - 24} = 10\sqrt{3}$;

答: 该斜坡的坡高 BC 长为 $10\sqrt{3}$ 米;

(2) $\because \angle \alpha = 60^\circ$,

$\therefore \angle AMN = 30^\circ$,

$\therefore AM = 2AN$,

\because 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AN^2 + MN^2 = AM^2$,

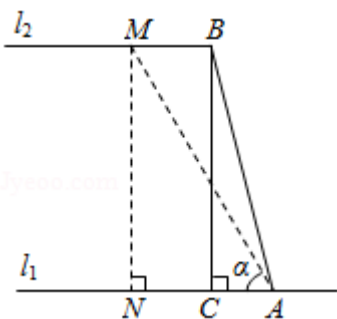
$\therefore AN^2 + 300 = 4AN^2$

$\therefore AN = 10$,

$\therefore AM = 20$,

$\therefore AM - AB = 20 - 18 = 2$.

综上所述, 长度增加了 2 米.



22. 近几年, 国内快递业务快速发展, 由于其便捷、高效, 人们越来越多地通过快递公司代办点来代寄包裹. 某快递公司某地区一代办点对 60 天中每天代寄的包裹数与天数的数据 (每天代寄包裹数、天数均为整数) 统计如下:

(1) 求该数据中每天代寄包裹数在 50.5 ~ 200.5 范围内的天数:

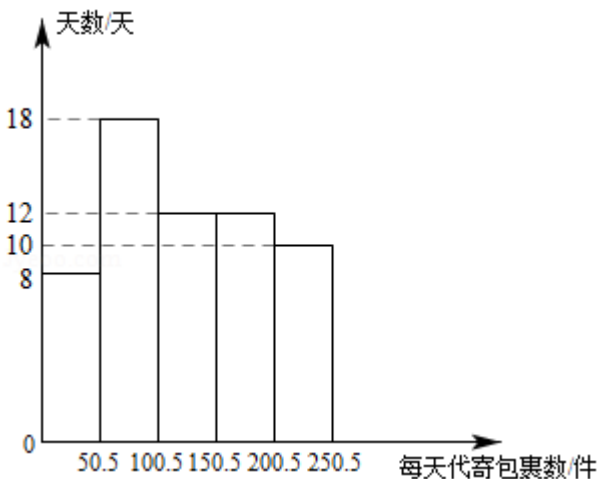
(2) 若该代办点对顾客代寄包裹的收费标准为: 重量小于或等于 1 千克的包裹收费 8 元; 重量超 1 千克的包裹, 在收费 8 元的基础上, 每超过 1 千克 (不足 1 千克的按 1 千克计算) 需再收取 2 元.

①某顾客到该代办点寄重量为 1.6 千克的包裹, 求该顾客应付多少元费用?

②这 60 天中, 该代办点为顾客代寄的包裹中有一部分重量超过 2 千克, 且不超过 5 千克. 现从中随机抽取 40 件包裹的重量数据作为样本, 统计如下:

重量 G (单位: 千克)	$2 < G \leq 3$	$3 < G \leq 4$	$4 < G \leq 5$
件数 (单位: 件)	15	10	15

求这 40 件包裹收取费用的平均数.



【解答】解: (1) 结合统计图可知:

每天代寄包裹数在 50.5 ~ 200.5 范围内的天数为 $18 + 12 + 12 = 42$ 天;

(2) ①因为 $1.6 > 1$, 故重量超过了 1kg ,

除了付基础费用 8 元, 还需要付超过 1kg 部分 0.6kg 的费用 2 元,

则该顾客应付费用为 $8 + 2 = 10$ (元);

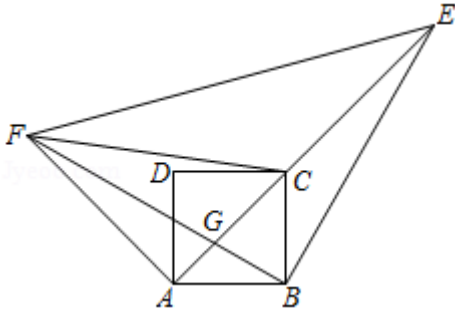
② $(12 \times 15 + 14 \times 10 + 15 \times 16) \div 40 = 14$ (元).

所以这 40 件包裹收取费用的平均数为 14 元.

23. 如图所示, $\triangle BEF$ 的顶点 E 在正方形 $ABCD$ 对角线 AC 的延长线上, AE 与 BF 交于点 G , 连接 AF 、 CF , 满足 $\triangle ABF \cong \triangle CBE$.

(1) 求证: $\angle EBF = 90^\circ$.

(2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为 1, $CE = 2$, 求 $\tan \angle AFC$ 的值.



【解答】(1) 证明: $\because \triangle ABF \cong \triangle CBE$,

$$\therefore \angle ABF = \angle CBE,$$

$$\because \angle ABF + \angle CBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ;$$

(2) 解: $\because \triangle ABF \cong \triangle CBE$,

$$\therefore \angle AFB = \angle CEB,$$

$$\because \angle FGA = \angle EGB,$$

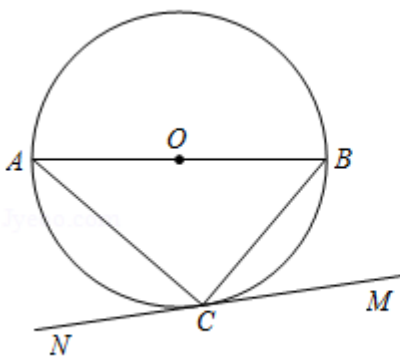
$$\therefore \angle FAC = \angle EBF = 90^\circ,$$

\because 正方形边长为 1, $CE = 2$.

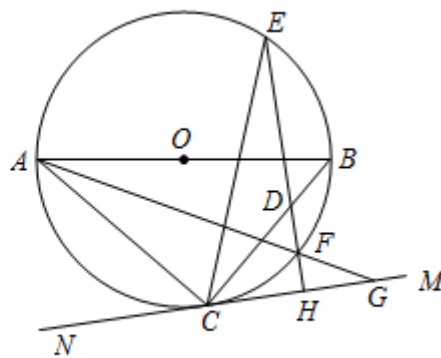
$$\therefore AC = \sqrt{2}, AF = CE = 2.$$

$$\therefore \tan \angle AFC = \frac{AC}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

24. AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\odot O$ 上一点, 连接 AC 、 BC , 直线 MN 过点 C , 满足 $\angle BCM = \angle BAC = \alpha$.



图①



图②

(1) 如图①, 求证: 直线 MN 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如图②, 点 D 在线段 BC 上, 过点 D 作 $DH \perp MN$ 于点 H , 直线 DH 交 $\odot O$ 于点 E 、 F , 连接 AF 并延长交直线 MN 于点 G , 连接 CE , 且 $CE = \frac{5}{3}$, 若 $\odot O$ 的半径为 1, $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, 求 $AG \cdot ED$ 的值.

【解答】(1) 证明: 连接 OC , 如图①,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$,

$\because OC = OB$,

$\therefore \angle B = \angle OCB$,

$\therefore \angle BCM = \angle A$,

$\therefore \angle OCB + \angle BCM = 90^\circ$, 即 $OC \perp MN$,

$\therefore MN$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: 如图②, $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\odot O$ 的半径为 1,

$\therefore AB = 2$,

$\because \cos \angle BAC = \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$, 即 $\frac{AC}{2} = \frac{3}{4}$,

$\therefore AC = \frac{3}{2}$,

$\because \angle AFE = \angle ACE$, $\angle GFH = \angle AFE$,

$\therefore \angle GFH = \angle ACE$,

$\because DH \perp MN$,

$\therefore \angle GFH + \angle AGC = 90^\circ$,

$\because \angle ACE + \angle ECD = 90^\circ$,

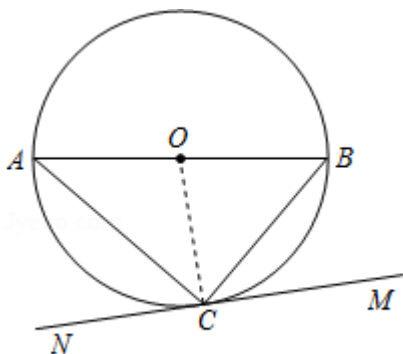
$\therefore \angle ECD = \angle AGC$,

又 $\because \angle DEC = \angle CAG$,

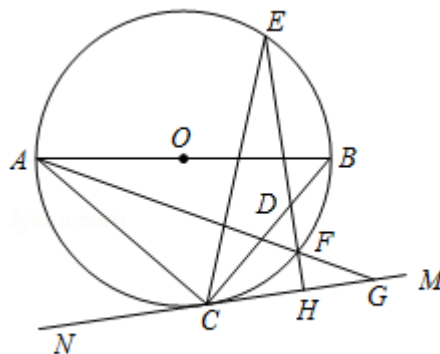
$\therefore \triangle EDC \sim \triangle ACG$,

$\therefore \frac{ED}{AC} = \frac{EC}{AG}$,

$\therefore AG \cdot DE = AC \cdot CE = \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$.



图①



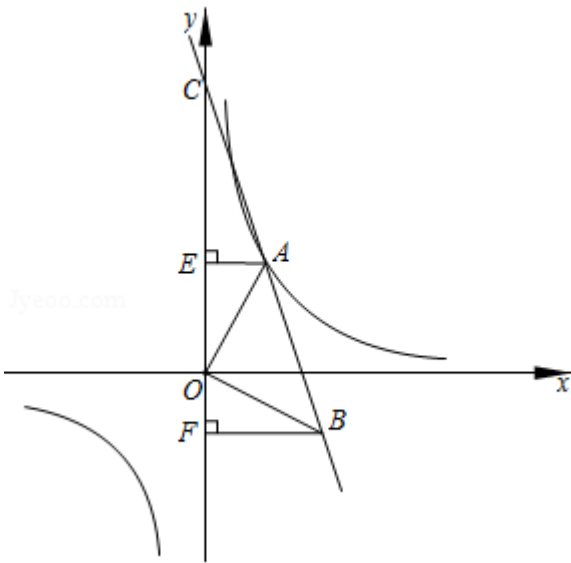
图②

25. 如图所示, $\triangle OAB$ 的顶点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上, 直线 AB 交 y 轴于点 C , 且点 C 的纵坐标为 5, 过点 A 、 B 分别作 y 轴的垂线 AE 、 BF , 垂足分别为点 E 、 F , 且 $AE = 1$.

- (1) 若点 E 为线段 OC 的中点, 求 k 的值;
- (2) 若 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形, $\angle AOB = 90^\circ$, 其面积小于 3.

①求证: $\triangle OAE \cong \triangle BOF$;

②把 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 称为 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 两点间的“ZJ 距离”, 记为 $d(M, N)$, 求 $d(A, C) + d(A, B)$ 的值.



【解答】解: (1) \because 点 E 为线段 OC 的中点, $OC = 5$,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OC = \frac{5}{2}, \text{ 即: } E \text{ 点坐标为 } (0, \frac{5}{2}),$$

又 $\because AE \perp y$ 轴, $AE = 1$,

$$\therefore A(1, \frac{5}{2}),$$

$$\therefore k = 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

(2) ①在 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形中, $AO = OB$, $\angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AOE + \angle FOB = 90^\circ,$$

又 $\because BF \perp y$ 轴,

$$\therefore \angle FBO + \angle FOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle FBO,$$

在 $\triangle OAE$ 和 $\triangle BOF$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEO = \angle OFB = 90^\circ \\ \angle AOE = \angle FBO \\ AO = BO \end{cases},$$

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle BOF (AAS),$

②解: 设点 A 坐标为 $(1, m),$

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle BOF,$

$\therefore BF = OE = m, OF = AE = 1,$

$\therefore B(m, -1),$

设直线 AB 解析式为: $l_{AB}: y = kx + 5,$ 将 AB 两点代入得:

$$\text{则} \begin{cases} k + 5 = m \\ km + 5 = -1 \end{cases}.$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = -3 \\ m_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} k_2 = -2 \\ m_2 = 3 \end{cases}.$$

当 $m = 2$ 时, $OE = 2, OA = \sqrt{5}, S_{\triangle AOB} = \frac{5}{2} < 3,$ 符合;

$$\begin{aligned} \therefore d(A, C) + d(A, B) &= AE + CE + (BF - AE) + (OE + OF) \\ &= 1 + CE + OE - 1 + OE + 1 = 1 + CE + 2OE = 1 + CO + OE = 1 + 5 + 2 = 8, \end{aligned}$$

当 $m = 3$ 时, $OE = 3, OA = \sqrt{10}, S_{\triangle AOB} = 5 > 3,$ 不符, 舍去;

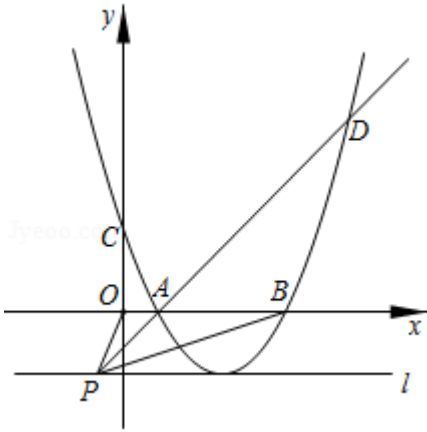
综上所述: $d(A, C) + d(A, B) = 8.$

26. 如图所示, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象 (记为抛物线 Γ) 与 y 轴交于点 $C,$ 与 x 轴分别交于点 $A, B,$ 点 A, B 的横坐标分别记为 $x_1, x_2,$ 且 $0 < x_1 < x_2.$

(1) 若 $a = c, b = -3,$ 且过点 $(1, -1),$ 求该二次函数的表达式;

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = 4.$ 求证: 当 $b < -\frac{5}{2}$ 时, 二次函数 $y_1 = ax^2 + (b+1)x + c$ 的图象与 x 轴没有交点.

(3) 若 $AB^2 = \frac{c^2 - 2c + 6}{c},$ 点 P 的坐标为 $(-\sqrt{x_0}, -1),$ 过点 P 作直线 l 垂直于 y 轴, 且抛物线的 Γ 的顶点在直线 l 上, 连接 $OP, AP, BP,$ PA 的延长线与抛物线 Γ 交于点 $D,$ 若 $\angle OPB = \angle DAB,$ 求 x_0 的最小值.



【解答】解：（1）由题意得： $y = ax^2 - 3x + a$ ，

∵ 函数过点 $(1, -1)$ ，

$$\therefore a - 3 + a = -1,$$

$$\therefore a = c = 1,$$

$$\therefore y = x^2 - 3x + 1;$$

（2）由题意，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = 4$ 。

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4,$$

$$\therefore 4ac = b^2 - 4,$$

在函数 $y_1 = ax^2 + (b+1)x + c$ 中， $\Delta_1 = (b+1)^2 - 4ac = (b+1)^2 - (b^2 - 4) = 2b + 5$ ，

$$\therefore b < -\frac{5}{2},$$

$$\therefore 2b + 5 < 0,$$

即函数图象与 x 轴没有交点；

（3）因为函数顶点在直线 l 上，则有 $\frac{4ac - b^2}{4a} = -1$ ，

$$\text{即 } b^2 - 4ac = 4a \text{ ①},$$

$$\therefore AB^2 = \frac{c^2 - 2c + 6}{c},$$

$$\therefore (x_2 - x_1)^2 = \frac{c^2 - 2c + 6}{c},$$

$$\text{即 } (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{c^2 - 2c + 6}{c},$$

$$\therefore \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{c^2 - 2c + 6}{c},$$

$$\text{由①得： } \frac{4}{a} = \frac{c^2 - 2c + 6}{c} \text{ ②},$$

$$\therefore \angle OAP = \angle DAB, \quad \angle OPB = \angle DAB,$$

$$\therefore \angle OAP = \angle OPB,$$

$$\therefore \angle OAP = \angle OBP + \angle APB, \quad \angle OPB = \angle OPA + \angle APB,$$

$$\therefore \angle OBP = \angle OPA,$$

则 $\triangle OAP \sim \triangle OPB$.

$$\therefore \frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB},$$

$$\therefore OA \cdot OB = OP^2,$$

$$\therefore x_1 x_2 = (-\sqrt{x_0})^2 + (-1)^2.$$

$$\therefore \frac{c}{a} = x_0 + 1,$$

$$\therefore x_0 = \frac{c}{a} - 1.$$

由②得: $x_0 = \frac{c^2 - 2c + 6}{4} - 1,$

$$\therefore x_0 = \frac{1}{4}(c-1)^2 + \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{当 } c=1 \text{ 时, } (x_0)_{\min} = \frac{1}{4}.$$

关注“数学吧”公众号，海量免费试卷下载！

