2016年湖南省株洲市中考数学试卷(参考答案)

一、选择题（每小题有且只有一个正确答案，本题共10小题，每小题3分，共30分）

1．（3分）﹣3的倒数是（　　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．﹣3　　D．3

【解答】解：∵﹣3×（$-\frac{1}{3}$）＝1，

∴﹣3的倒数是$-\frac{1}{3}$.

故选：A．

2．（3分）$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=$（　　）

A．$4\sqrt{2}$　　B．4　　C．$\sqrt{10}$　　D．$2\sqrt{2}$

【解答】解：$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$．

故选：B．

3．（3分）下列各式中，与$3x^2y^3$是同类项的是（　　）

A．$2x^5$　　B．$3x^3y^2$　　C．$-\frac{1}{2}x^2y^3$　　D．$-\frac{1}{3}y^5$

【解答】解：A、$2x^5$与$3x^2y^3$不是同类项，故本选项错误；

B、$3x^3y^2$与$3x^2y^3$不是同类项，故本选项错误；

C、$-\frac{1}{2}x^2y^3$与$3x^2y^3$是同类项，故本选项正确；

D、$-\frac{1}{3}y^5$与$3x^2y^3$是同类项，故本选项错误；

故选：C．

4．（3分）对于任意的矩形，下列说法一定正确的是（　　）

A．对角线垂直且相等

B．四边都互相垂直

C．四个角都相等

D．是轴对称图形，但不是中心对称图形

【解答】解：A、矩形的对角线相等，但不垂直，故此选项错误；

B、矩形的邻边都互相垂直，对边互相平行，故此选项错误；

C、矩形的四个角都相等，正确；

D、矩形是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项错误．

故选：C．

5．（3 分）关于 x 的分式方程$\frac{2}{x}-\frac{5}{x-3}=0$ 的解为（　　）

A．－3　　B．－2　　C．2　　D．3

【解答】解：去分母得：$2x-6-5x=0$，

解得：$x=-2$，

经检验 $x=-2$ 是分式方程的解，

故选：B．

6．（3 分）在平面直角坐标系中，点 A（2，－3）位于哪个象限？（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【解答】解：点 A 坐标为（2，－3），则它位于第四象限，

故选：D．

7．（3 分）若一组数据 x，3，1，6，3 的中位数和平均数相等，则 x 的值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【解答】解：当 $x\leqslant 1$ 时，中位数与平均数相等，则得到：$\frac{1}{5}(x+3+1+6+3)=3$，

解得 $x=2$（舍去）；

当 $1<x<3$ 时，中位数与平均数相等，则得到：$\frac{1}{5}(x+3+1+6+3)=3$，

解得 $x=2$；

当 $3\leqslant x<6$ 时，中位数与平均数相等，则得到：$\frac{1}{5}(x+3+1+6+3)=3$，

解得 $x=2$（舍去）；

当 $x\geqslant 6$ 时，中位数与平均数相等，则得到：$\frac{1}{5}(x+3+1+6+3)=3$，

解得 $x=2$（舍去）．

所以 x 的值为 2．

故选：A．

8．（3 分）下列各选项中因式分解正确的是（　　）

A．$x^2-1=(x-1)^2$　　B．$a^3-2a^2+a=a^2(a-2)$

C．$-2y^2+4y=-2y(y+2)$　　D．$m^2n-2mn+n=n(m-1)^2$

【解答】解：A、$x^2-1=(x+1)(x-1)$，故此选项错误；

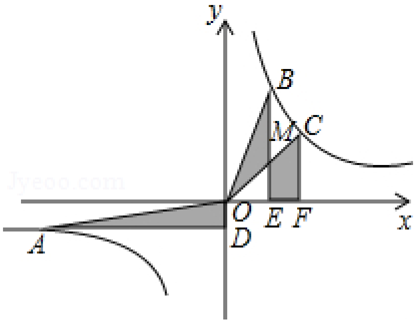
B、$a^3-2a^2+a=a(a-1)^2$，故此选项错误；

C、$-2y^2+4y=-2y(y-2)$，故此选项错误；

D、$m^2n-2mn+n=n(m-1)^2$，正确．

故选：D．

9．（3 分）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A、B、C 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）上不同的三点，连接 OA、OB、OC，过点 A 作 $AD\perp y$ 轴于点 D，过点 B、C 分别作 BE，CF 垂直 x 轴于点 E、F，OC 与 BE 相交于点 M，记△AOD、△BOM、四边形 CMEF 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，则（　　）



A．$S_1=S_2+S_3$　　B．$S_2=S_3$　　C．$S_3>S_2>S_1$　　D．$S_1S_2<S_3^2$

【解答】解：∵点 A、B、C 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）上不同的三点，$AD\perp y$ 轴，BE，CF 垂直 x 轴于点 E、F，

∴$S_1=\frac{1}{2}k$，$S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}=\frac{1}{2}k$，

∵$S_{\triangle BOE}-S_{OME}=S_{\triangle CDF}-S_{\triangle OME}$，

∴$S_3=S_2$，

故选：B．

10．（3 分）从 -1，1，2，4 四个数中任取两个不同的数（记作 a_k，b_k）构成一个数组 $M_K=\{a_k，b_k\}$（其中 $k=1，2\cdots S$，且将$\{a_k，b_k\}$与$\{b_k，a_k\}$视为同一个数组），若满足：对于任意的 $M_i=\{a_i，b_i\}$和 $M_j=\{a_j，b_j\}$（$i\neq j$，$1\leqslant i\leqslant S$，$1\leqslant j\leqslant S$）都有 $a_i+b_i\neq a_j+b_j$，则 S 的最大值（　　）

A．10　　B．6　　C．5　　D．4

【解答】解：∵$-1+1=0$，$-1+2=1$，$-1+4=3$，$1+2=3$，$1+4=5$，$2+4=6$，

∴a_i+b_i 共有 5 个不同的值．

又∵对于任意的 $M_i=\{a_i，b_i\}$和 $M_j=\{a_j，b_j\}$（$i\neq j$，$1\leqslant i\leqslant S$，$1\leqslant j\leqslant S$）都有 $a_i+b_i\neq a_j+b_j$，

∴S 的最大值为 5．

故选：C．

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11．（3 分）若二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象开口向下，则 a__<__0（填“＝”或“＞”或“＜”）．

【解答】解：∵二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象开口向下，

∴$a<0$．

故答案是：＜．

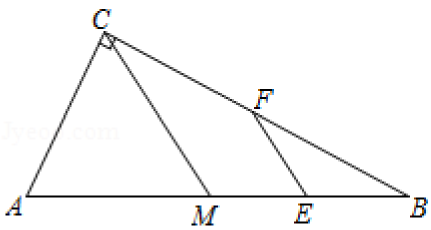
12．（3 分）若一个盒子中有 6 个白球，4 个黑球，2 个红球，且各球的大小与质地都相同，现随机从中摸出一个球，得到白球的概率是 $\underline{\frac{1}{2}}$．

【解答】解：∵布袋中有 6 个白球，4 个黑球，2 个红球，共有 12 个球，

∴摸到白球的概率是 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$；

故答案为：$\frac{1}{2}$．

13．（3 分）如图所示，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，CM 是斜边 AB 上的中线，E、F 分别为 MB、BC 的中点，若 $EF=1$，则 $AB=$__4__．



【解答】解：∵E、F 分别为 MB、BC 的中点，

∴$CM=2EF=2$，

∵$\angle ACB=90°$，CM 是斜边 AB 上的中线，

∴$AB=2CM=4$，

故答案为：4．

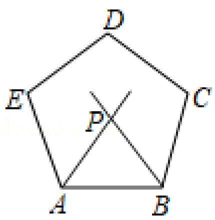
14．（3 分）若 a 为有理数，且 $2-a$ 的值大于 1，则 a 的取值范围为__$a<1$ 且 a 为有理数__．

【解答】解：根据题意知 $2-a>1$，

解得 $a<1$，

故答案为：$a<1$ 且 a 为有理数．

15．（3 分）如图所示，过正五边形 $ABCDE$ 的顶点 B 作一条射线与其内角 $\angle EAB$ 的角平分线相交于点 P，且 $\angle ABP=60°$，则 $\angle APB=$__66__度．



【解答】解：∵五边形 $ABCDE$ 为正五边形，

∴$\angle EAB=108$ 度，

∵AP 是$\angle EAB$ 的角平分线，

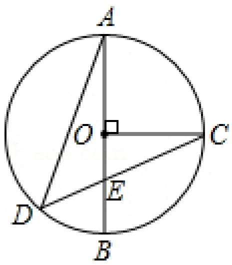
∴$\angle PAB=54$ 度，

∵$\angle ABP=60^\circ$，

∴$\angle APB=180^\circ-60^\circ-54^\circ=66^\circ$．

故答案为：66．

16．（3 分）如图所示，AB 为$\odot O$ 的直径，点 C 在$\odot O$ 上，且 $OC\perp AB$，过点 C 的弦 CD 与线段 OB 相交于点 E，满足$\angle AEC=65^\circ$，连接 AD，则$\angle BAD=$__20__度．



【解答】解：连接 OD，如图：

∵$OC\perp AB$，

∴$\angle COE=90^\circ$，

∵$\angle AEC=65^\circ$，

∴$\angle OCE=90^\circ-65^\circ=25^\circ$，

∵$OC=OD$，

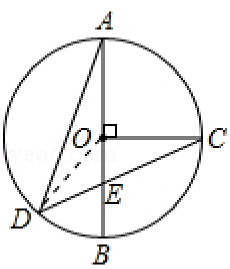
∴$\angle ODC=\angle OCE=25^\circ$，

∴$\angle DOC=180^\circ-25^\circ-25^\circ=130^\circ$，

∴$\angle BOD=\angle DOC-\angle COE=40^\circ$，

∴$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=20^\circ$，

故答案为：20．



17．（3 分）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题："今有善行者行一百步，不善行者行六十步．今不善行者先行一百步，善行者追之，问几何步及之？"其意思为：速度快的人走 100 步，速度慢的人只走 60 步，现速度慢的人先走 100 步，速度快的人去追赶，则速度快的人要走 250 步才能追到速度慢的人．

【解答】解：设走路快的人追上走路慢的人所用时间为 t，

根据题意得：$(100-60)t=100$，

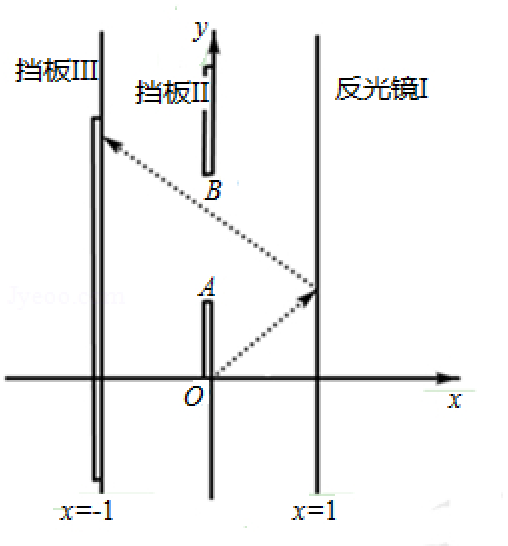
解得：$t=2.5$，

$\therefore 100t=100\times2.5=250$．

答：走路快的人要走 250 步才能追上走路慢的人．

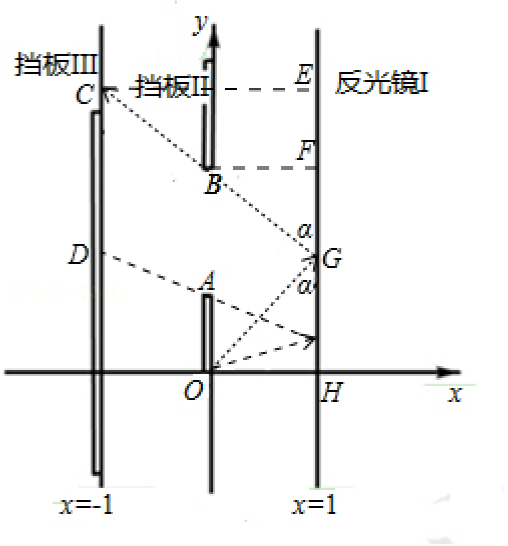
故答案是：250．

18．（3 分）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，在直线 $x=1$ 处放置反光镜Ⅰ，在 y 轴处放置一个有缺口的挡板Ⅱ，缺口为线段 AB，其中点 A（0，1），点 B 在点 A 上方，且 $AB=1$，在直线 $x=-1$ 处放置一个挡板Ⅲ，从点 O 发出的光线经反光镜Ⅰ反射后，通过缺口 AB 照射在挡板Ⅲ上，则落在挡板Ⅲ上的光线的长度为 1.5 ．



【解答】解：当光线沿 O、G、B、C 传输时，

过点 B 作 $BF\perp GH$ 于点 F，过点 C 作 $CE\perp GH$ 于点 E，



方法一：∵△GOB 为等腰三角形，

∴G （1，1），

∵B 为 CG 中点，

∴C （－1，3），

同理 D（－1，1.5），

∴$CD=3-1.5=1.5$

方法二：$\angle OGH=\angle CGE=\alpha$，设 $GH=a$，则 $GF=2-a$，

则 $\tan\angle OGH=\tan\angle CGE$，即：$\frac{OH}{GH}=\frac{BF}{GF}$，

即：$\frac{1}{a}=\frac{1}{2-a}$，解得：$a=1$，

则 $\alpha=45°$，

∴$GE=CE=2$，$y_C=1+2=3$，

当光线反射过点 A 时，

同理可得：$y_D=1.5$，

落在挡板III上的光线的长度$=CD=3-1.5=1.5$，

故答案为 1.5．

三、解答题（本大题共 8 小题，共 66 分）

19．（6 分）计算：$|-\sqrt{3}|+\pi^0-2\cos30°$ ．

【解答】解：原式$=\sqrt{3}+1-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}$

＝1．

20．（6 分）先化简，再求值：$\frac{a^2-a}{(a-1)^2}-\frac{a+1}{a}$，其中 $a=\frac{1}{2}$.

【解答】解：$\frac{a^2-a}{(a-1)^2}-\frac{a+1}{a}$

$=\frac{a(a-1)}{(a-1)^2}-\frac{a+1}{a}$

$=\frac{a}{a-1}-\frac{a+1}{a}$

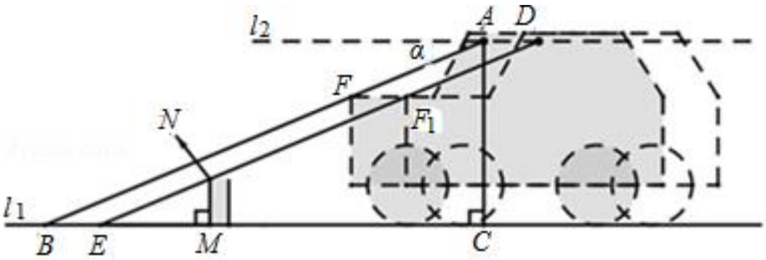
$=\frac{a^2-(a-1)(a+1)}{a(a-1)}$

$=\frac{a^2-a^2+1}{a(a-1)}$

$=\frac{1}{a(a-1)}$，

当 $a=\frac{1}{2}$时，原式$=\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}=-4$.

21．（8 分）小强的爸爸准备驾车外出．启动汽车时，车载报警系统显示正前方有障碍物，此时在眼睛点 A 处测得汽车前端 F 的俯角为 α，且 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，若直线 AF 与地面 l_1 相交于点 B，点 A 到地面 l_1 的垂线段 AC 的长度为 1.6 米，假设眼睛 A 处的水平线 l_2 与地面 l_1 平行．



（1）求 BC 的长度；

（2）假如障碍物上的点 M 正好位于线段 BC 的中点位置（障碍物的横截面为长方形，且线段 MN 为此长方形前端的边），$MN\perp l_1$，若小强的爸爸将汽车沿直线 l_1 后退 0.6 米，通过汽车的前端 F_1 点恰好看见障碍物的顶部 N 点（点 D 为点 A 的对应点，点 F_1 为点 F 的对应点），求障碍物的高度．

【解答】解：（1）由题意得，$\angle ABC=\angle\alpha$，

在 Rt△ABC 中，$AC=1.6$，$\tan\angle ABC=\tan\alpha=\frac{1}{3}$，

$\therefore BC=\frac{AC}{\tan\angle ABC}=\frac{1.6}{\frac{1}{3}}=4.8m$，

答：BC 的长度为 $4.8m$；

（2）过 D 作 $DH\perp BC$ 于 H，

则四边形 $ADHC$ 是矩形，

∴$AD=CH=BE=0.6$，

∵点 M 是线段 BC 的中点，

∴$BM=CM=2.4$ 米，

∴$EM=BM-BE=1.8$，

∵$MN\perp BC$，

∴$MN\parallel DH$，

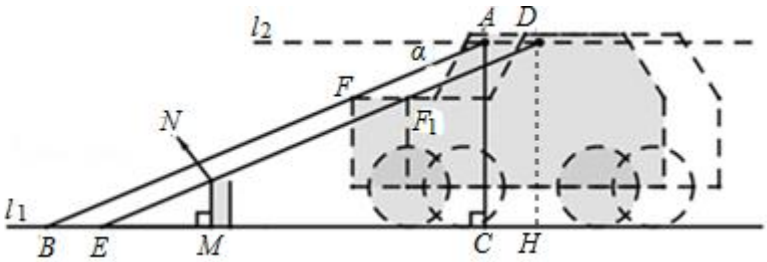
∴$\triangle EMN\backsim\triangle EHD$，

∴$\dfrac{MN}{DH}=\dfrac{EM}{EH}$，

∴$\dfrac{MN}{1.6}=\dfrac{1.8}{4.8}$，

∴$MN=0.6$，

答：障碍物的高度为 0.6 米．



22．（8 分）某甜品店计划订购一种鲜奶，根据以往的销售经验，当天的需求量与当天的最高气温 T 有关，现将去年六月份（按 30 天计算）的有关情况统计如下：

（最高气温与需求量统计表）

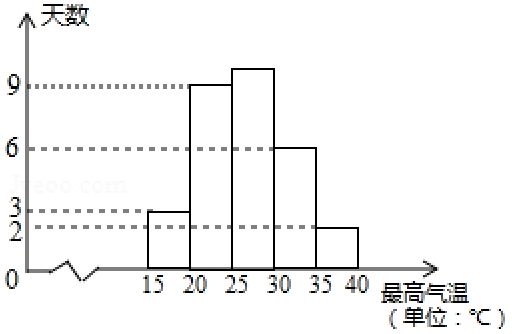
最高气温 T（单位：℃）	需求量（单位：杯）
$T<25$	200
$25\leqslant T<30$	250
$T\geqslant 30$	400

（1）求去年六月份最高气温不低于 30℃的天数；

（2）若以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率，求去年六月份这种鲜奶一天的需求量不超过 200 杯的概率；

（3）若今年六月份每天的进货量均为 350 杯，每杯的进价为 4 元，售价为 8 元，未售出的这种鲜奶厂家以 1 元的价格收回销毁，假设今年与去年的情况大致一样，若今年六月份某天的最高气温 T 满足 25

≤T<30（单位：℃），试估计这一天销售这种鲜奶所获得的利润为多少元？



【解答】解：（1）由条形统计图知，去年六月份最高气温不低于30℃的天数为6+2＝8（天）；

（2）去年六月份这种鲜奶一天的需求量不超过200杯的概率为$\frac{3+9}{30}=\frac{2}{5}$；

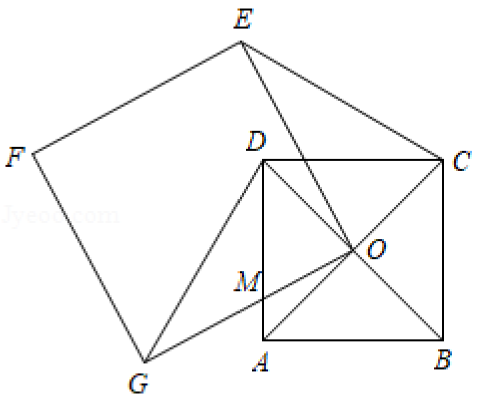
（3）250×8－350×4+100×1＝700（元），

答：估计这一天销售这种鲜奶所获得的利润为700元．

23．（8分）如图所示，已知正方形$OEFG$的顶点O为正方形$ABCD$对角线AC、BD的交点，连接CE、DG．

（1）求证：$\triangle DOG\cong\triangle COE$；

（2）若$DG\perp BD$，正方形$ABCD$的边长为2，线段AD与线段OG相交于点M，$AM=\frac{1}{2}$，求正方形$OEFG$的边长．



【解答】解：

（1）∵正方形$ABCD$与正方形$OEFG$，对角线AC、BD

∴$DO=OC$

∵$DB\perp AC$，

∴$\angle DOA=\angle DOC=90^\circ$

∵$\angle GOE=90^\circ$

∴$\angle GOD+\angle DOE=\angle DOE+\angle COE=90^\circ$

∴∠GOD＝∠COE

∵GO＝OE

∴在△DOG和△COE中

$$\begin{cases} DO=OC \\ \angle GOD=\angle COE \\ GD=OE \end{cases}$$

∴△DOG≌△COE（SAS）

（2）如图，过点M作MH⊥DO交DO于点H

∵$AM=\frac{1}{2}$，DA＝2

∴$DM=\frac{3}{2}$

∵∠MDB＝45°

∴MH＝DH＝sin45°•$DM=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，DO＝cos45°•$DA=\sqrt{2}$

∴HO＝DO﹣$DH=\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

∴在Rt△MHO中，由勾股定理得

$MO=\sqrt{MH^2+HO^2}=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{4})^2+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

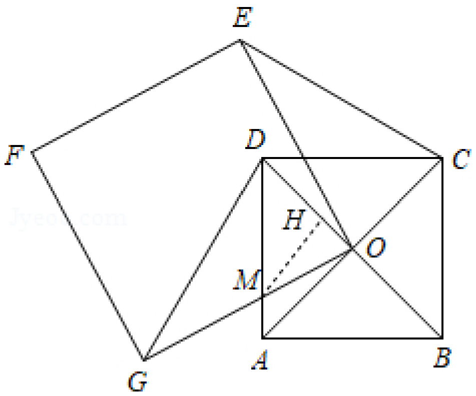
∵DG⊥BD，MH⊥DO

∴MH∥DG

∴易证△OHM∽△ODG

∴$\frac{OH}{OD}=\frac{MO}{GO}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{GO}$，得$GO=2\sqrt{5}$

则正方形$OEFG$的边长为$2\sqrt{5}$



24.（8分）如图所示，在平面直角坐标系Oxy中，等腰△OAB的边OB与反比例函数$y=\frac{m}{x}$（$m>0$）的图

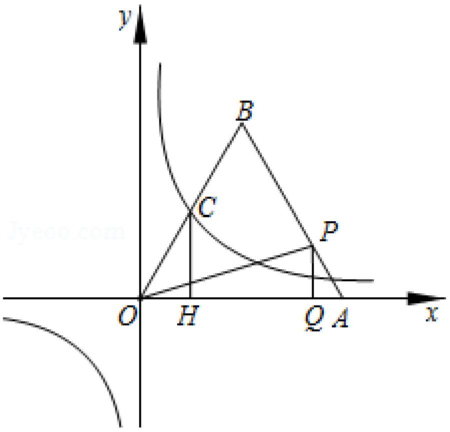
象相交于点 C，其中 $OB=AB$，点 A 在 x 轴的正半轴上，点 B 的坐标为（2，4），过点 C 作 $CH\perp x$ 轴于点 H.

（1）已知一次函数的图象过点 O，B，求该一次函数的表达式；

（2）若点 P 是线段 AB 上的一点，满足 $OC=\sqrt{3}AP$，过点 P 作 $PQ\perp x$ 轴于点 Q，连结 OP，记△OPQ 的面积为 $S_{\triangle OPQ}$，设 $AQ=t$，$T=OH^2-S_{\triangle OPQ}$

①用 t 表示 T（不需要写出 t 的取值范围）；

②当 T 取最小值时，求 m 的值.



【解答】解：（1）将点 O、B 的坐标代入一次函数表达式：$y=kx$ 得：$4=2k$，

解得：$k=2$，

故一次函数表达式为：$y=2x$，

（2）①过点 B 作 $BM\perp OA$，

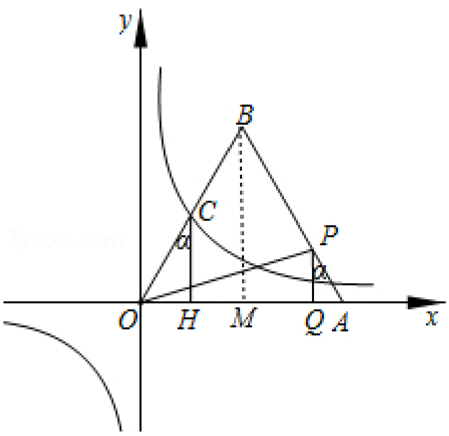
则 $\angle OCH=\angle QPA=\angle OAB=\angle ABM=\alpha$，

则 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

∵$OB=AB$，则 $OM=AM=2$，则点 A（4，0），

设：$AP=a$，则 $OC=\sqrt{3}a$，

在△APQ 中，$\sin\angle APQ=\frac{QA}{PA}=\frac{t}{a}=\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，



同理 $PQ=\frac{t}{tan\alpha}=2t$，

则 $PA=a=\sqrt{5}t$，$OC=\sqrt{15}t$，

则点 C（$\sqrt{3}t$，$2\sqrt{3}t$），

$T=OH^2-S_{\triangle OPQ}=(OC\bullet\sin\alpha)^2-\frac{1}{2}\times(4-t)\times 2t=4t^2-4t$，

②∵$4>0$，∴T 有最小值，当 $t=\frac{1}{2}$时，

T取得最小值，

而点 C（$\sqrt{3}t$，$2\sqrt{3}t$），

故：$m=\sqrt{3}t\times2\sqrt{3}t=\frac{3}{2}$.

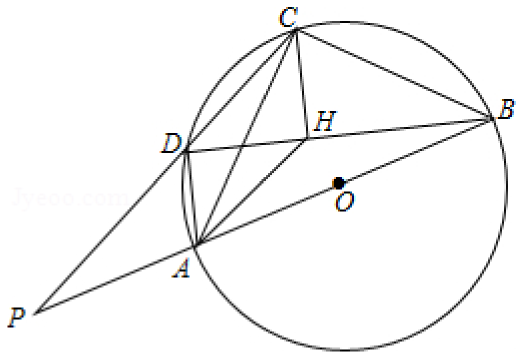
25．（11 分）四边形 $ABCD$ 是⊙O 的圆内接四边形，线段 AB 是⊙O 的直径，连结 AC、BD．点 H 是线段 BD 上的一点，连结 AH、CH，且∠ACH＝∠CBD，AD＝CH，BA 的延长线与 CD 的延长线相交于点 P．

（1）求证：四边形 $ADCH$ 是平行四边形；

（2）若 AC＝BC，$PB=\sqrt{5}PD$，$AB+CD$＝2（$\sqrt{5}+1$）

①求证：△DHC 为等腰直角三角形；

②求 CH 的长度．



【解答】证明：（1）∵∠DBC＝∠DAC，∠ACH＝∠CBD

∴∠DAC＝∠ACH

∴AD∥CH，且 AD＝CH

∴四边形 $ADCH$ 是平行四边形

（2）①∵AB 是直径

∴∠ACB＝90°＝∠ADB，且 AC＝BC

∴∠CAB＝∠ABC＝45°，

∴∠CDB＝∠CAB＝45°

∵AD∥CH

∴∠ADH＝∠CHD＝90°，且∠CDB＝45°

∴∠CDB＝∠DCH＝45°

∴CH＝DH，且∠CHD＝90°

∴△DHC 为等腰直角三角形；

②∵四边形 $ABCD$ 是⊙O 的圆内接四边形，

∴$\angle ADP=\angle PBC$，且$\angle P=\angle P$

∴$\triangle ADP\backsim\triangle CBP$

∴$\frac{AD}{BC}=\frac{PD}{PB}$，且 $PB=\sqrt{5}PD$，

∴$\frac{AD}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$AD=CH$，

∴$\frac{CH}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

∵$\angle CDB=\angle CAB=45^\circ$，$\angle CHD=\angle ACB=90^\circ$

∴$\triangle CHD\backsim\triangle ACB$

∴$\frac{CD}{AB}=\frac{CH}{BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

∴$AB=\sqrt{5}CD$

∵$AB+CD=2(\sqrt{5}+1)$

∴$\sqrt{5}CD+CD=2(\sqrt{5}+1)$

∴$CD=2$，且$\triangle DHC$为等腰直角三角形

∴$CH=\sqrt{2}$

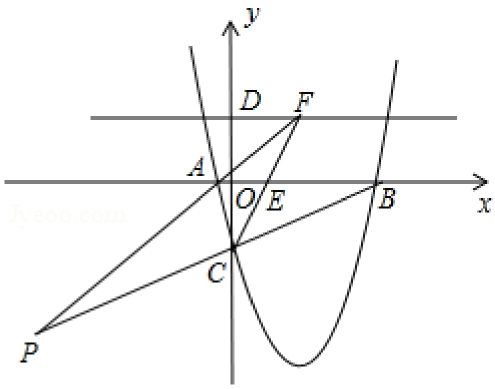
26.（11 分）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）

（1）若 $a=1$，$b=-2$，$c=-1$

①求该二次函数图象的顶点坐标；

②定义：对于二次函数 $y=px^2+qx+r$（$p\neq0$），满足方程 $y=x$ 的 x 的值叫做该二次函数的“不动点”．求证：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 有两个不同的“不动点”．

（2）设 $b=\frac{1}{2}c^3$，如图所示，在平面直角坐标系 Oxy 中，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴分别相交于不同的两点 A（x_1，0），B（x_2，0），其中 $x_1<0$，$x_2>0$，与 y 轴相交于点 C，连结 BC，点 D 在 y 轴的正半轴上，且 $OC=OD$，又点 E 的坐标为（1，0），过点 D 作垂直于 y 轴的直线与直线 CE 相交于点 F，满足$\angle AFC=\angle ABC$．FA 的延长线与 BC 的延长线相交于点 P，若$\frac{PC}{PA}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5a^2+1}}$，求二次函数的表达式．



【解答】解：（1）①∵$a=1$，$b=-2$，$c=-1$

∴$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

∴该二次函数图象的顶点坐标为（1，-2）

②证明：当 $y=x$ 时，$x^2-2x-1=x$

整理得：$x^2-3x-1=0$

∴$\triangle=(-3)^2-4\times1\times(-1)=13>0$

∴方程 $x^2-3x-1=0$ 有两个不相等的实数根

即二次函数 $y=x^2-2x-1$ 有两个不同的“不动点”.

（2）把 $b=\frac{1}{2}c^3$ 代入二次函数得：$y=ax^2+\frac{1}{2}c^3x+c$

∵二次函数与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$，$B(x_2, 0)$（$x_1<0$，$x_2>0$）

即 x_1、x_2 为方程 $ax^2+\frac{1}{2}c^3x+c=0$ 的两个不相等实数根

∴$x_1+x_2=-\frac{\frac{1}{2}c^3}{a}=-\frac{c^3}{2a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$

∵当 $x=0$ 时，$y=ax^2+\frac{1}{2}c^3x+c=c$

∴$C(0, c)$

∵$E(1, 0)$

∴$CE=\sqrt{1+c^2}$，$AE=1-x_1$，$BE=x_2-1$

∵$DF\perp y$ 轴，$OC=OD$

∴$DF\parallel x$ 轴

∴$\frac{CE}{EF}=\frac{OC}{OD}=1$

∴$EF=CE=\sqrt{1+c^2}$，$CF=2\sqrt{1+c^2}$

∵$\angle AFC=\angle ABC$，$\angle AEF=\angle CEB$

∴$\triangle AEF \backsim \triangle CEB$

∴$\frac{AE}{CE}=\frac{EF}{BE}$，即 $AE \cdot BE=CE \cdot EF$

∴$(1-x_1)(x_2-1)=1+c^2$

展开得：$1+c^2=x_2-1-x_1x_2+x_1$

$1+c^2=-\frac{c^3}{2a}-1-\frac{c}{a}$

$c^3+2ac^2+2c+4a=0$

$c^2(c+2a)+2(c+2a)=0$

$(c^2+2)(c+2a)=0$

∵$c^2+2>0$

∴$c+2a=0$，即 $c=-2a$

∴$x_1+x_2=-\frac{-8a^3}{2a}=4a^2$，$x_1x_2=\frac{-2a}{a}=-2$，$CF=2\sqrt{1+c^2}=2\sqrt{1+4a^2}$

∴$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16a^4+8$

∴$AB=x_2-x_1=\sqrt{16a^4+8}=2\sqrt{4a^4+2}$

∵$\angle AFC=\angle ABC$，$\angle P=\angle P$

∴$\triangle PFC \backsim \triangle PBA$

∴$\frac{CF}{AB}=\frac{PC}{PA}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5a^2+1}}$

∴$\frac{2\sqrt{1+4a^2}}{2\sqrt{4a^4+2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5a^2+1}}$

解得：$a_1=1$，$a_2=-1$（舍去）

∴$c=-2a=-2$，$b=\frac{1}{2}c^3=-4$

∴二次函数的表达式为 $y=x^2-4x-2$