

**2016 年湖南省株洲市中考数学试卷(参考答案)**

一、选择题 (每小题只有一个正确答案, 本题共 10 小题, 共 30 分)

1. (3 分) 下列数中, -3 的倒数是 ( )

- A.  $-\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C. -3                      D. 3

**【解答】**解:  $1 \div (-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ .

故选: A.

2. (3 分) 下列等式错误的是 ( )

- A.  $(2mn)^2 = 4m^2n^2$                       B.  $(-2mn)^2 = 4m^2n^2$   
 C.  $(2m^2n^2)^3 = 8m^6n^6$                       D.  $(-2m^2n^2)^3 = -8m^5n^5$

**【解答】**解: A、结果是  $4m^2n^2$ , 故本选项不符合题意;

B、结果是  $4m^2n^2$ , 故本选项不符合题意;

C、结果是  $8m^6n^6$ , 故本选项不符合题意;

D、结果是  $-8m^6n^6$ , 故本选项符合题意;

故选: D.

3. (3 分) 甲、乙、丙、丁四名射击队员考核赛的平均成绩(环)及方差统计如表, 现要根据这些数据, 从中选出一人参加比赛, 如果你是教练员, 你的选择是 ( )

队员	平均成绩	方差
甲	9.7	2.12
乙	9.6	0.56
丙	9.7	0.56
丁	9.6	1.34

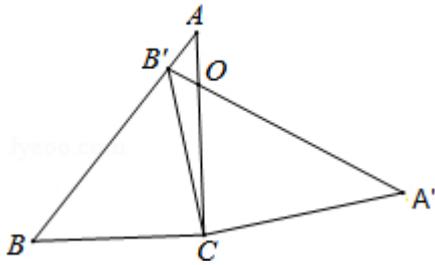
- A. 甲                      B. 乙                      C. 丙                      D. 丁

**【解答】**解:  $\because \bar{x}_{甲} = \bar{x}_{丙} = 9.7, S^2_{甲} > S^2_{丙}$ ,

$\therefore$  选择丙.

故选: C.

4. (3 分) 如图, 在三角形 ABC 中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle B = 50^\circ$ , 将此三角形绕点 C 沿顺时针方向旋转后得到三角形 A' B' C, 若点 B' 恰好落在线段 AB 上, AC、A' B' 交于点 O, 则  $\angle COA'$  的度数是 ( )



- A.  $50^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $70^\circ$                       D.  $80^\circ$

**【解答】**解:  $\because$ 在三角形  $ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $\angle B=50^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A=180^\circ - \angle ACB - \angle B=40^\circ$ .

由旋转的性质可知:

$$BC=B'C,$$

$$\therefore \angle B=\angle BB'C=50^\circ.$$

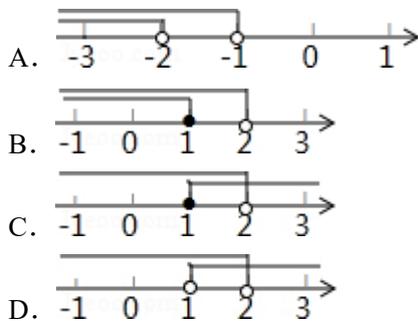
$$\text{又} \because \angle BB'C=\angle A+\angle ACB'=40^\circ + \angle ACB',$$

$$\therefore \angle ACB'=10^\circ,$$

$$\therefore \angle COA'=\angle AOB'=\angle OB'C+\angle ACB'=\angle B+\angle ACB'=60^\circ.$$

故选: B.

5. (3分) 不等式  $\begin{cases} 2x-1 \geq 1 \\ x-2 < 0 \end{cases}$  的解集在数轴上表示为 ( )



**【解答】**解: 解不等式  $2x-1 \geq 1$ , 得:  $x \geq 1$ ,

解不等式  $x-2 < 0$ , 得:  $x < 2$ ,

$\therefore$  不等式组的解集为:  $1 \leq x < 2$ ,

故选: C.

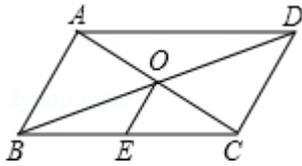
6. (3分) 在解方程  $\frac{x-1}{3} + x = \frac{3x+1}{2}$  时, 方程两边同时乘以 6, 去分母后, 正确的是 ( )

- A.  $2x-1+6x=3(3x+1)$                       B.  $2(x-1)+6x=3(3x+1)$   
 C.  $2(x-1)+x=3(3x+1)$                       D.  $(x-1)+x=3(x+1)$

**【解答】**解: 方程两边同时乘以 6 得:  $2(x-1)+6x=3(3x+1)$ ,

故选: B.

7. (3分) 已知四边形  $ABCD$  是平行四边形, 对角线  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ ,  $E$  是  $BC$  的中点, 以下说法错误的是 ( )



- A.  $OE = \frac{1}{2}DC$       B.  $OA = OC$       C.  $\angle BOE = \angle OBA$       D.  $\angle OBE = \angle OCE$

**【解答】**解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$\therefore OA = OC, OB = OD, AB \parallel DC,$

又  $\because$  点  $E$  是  $BC$  的中点,

$\therefore OE$  是  $\triangle BCD$  的中位线,

$\therefore OE = \frac{1}{2}DC, OE \parallel DC,$

$\therefore OE \parallel AB,$

$\therefore \angle BOE = \angle OBA,$

$\therefore$  选项 A、B、C 正确;

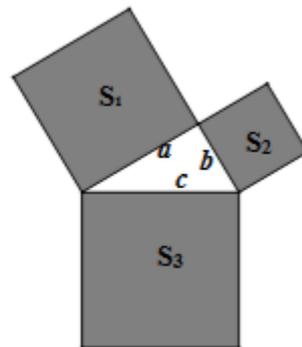
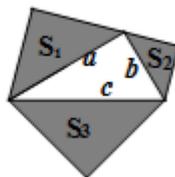
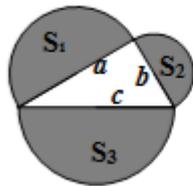
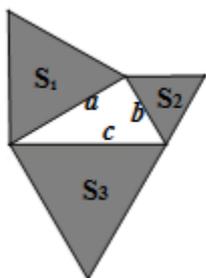
$\because OB \neq OC,$

$\therefore \angle OBE \neq \angle OCE,$

$\therefore$  选项 D 错误;

故选: D.

8. (3分) 如图, 以直角三角形  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为边, 向外作等边三角形, 半圆, 等腰直角三角形和正方形, 上述四种情况的面积关系满足  $S_1 + S_2 = S_3$  图形个数有 ( )



- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

**【解答】**解: (1)  $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2,$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2,$$

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3.$$

$$(2) S_1 = \frac{\pi}{8}a^2, S_2 = \frac{\pi}{8}b^2, S_3 = \frac{\pi}{8}c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}c^2,$$

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3.$$

$$(3) S_1 = \frac{1}{4}a^2, S_2 = \frac{1}{4}b^2, S_3 = \frac{1}{4}c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}c^2,$$

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3.$$

$$(4) S_1 = a^2, S_2 = b^2, S_3 = c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

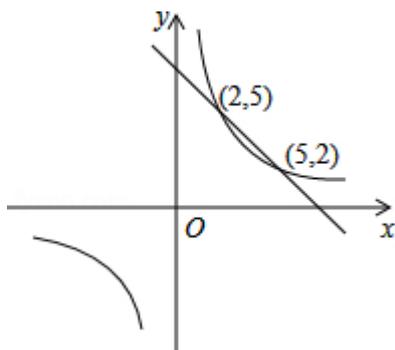
$$\therefore S_1 + S_2 = S_3.$$

综上, 可得

面积关系满足  $S_1 + S_2 = S_3$  图形有 4 个.

故选: *D*.

9. (3 分) 已知, 如图一次函数  $y_1 = ax + b$  与反比例函数  $y_2 = \frac{k}{x}$  的图象如图所示, 当  $y_1 < y_2$  时,  $x$  的取值范围是 ( )



- A.  $x < 2$                       B.  $x > 5$                       C.  $2 < x < 5$                       D.  $0 < x < 2$  或  $x > 5$

**【解答】**解: 根据题意得: 当  $y_1 < y_2$  时,  $x$  的取值范围是  $0 < x < 2$  或  $x > 5$ .

故选: D.

10. (3分) 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) 的图象经过点  $A(-1, 2)$ ,  $B(2, 5)$ , 顶点坐标为  $(m, n)$ , 则下列说法错误的是 ( )

- A.  $c < 3$                       B.  $m \geq \frac{1}{2}$                       C.  $n \leq 2$                       D.  $b < 1$

**【解答】**解: 由已知可知: 
$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases}$$

消去  $b$  得:  $c = 3 - 2a < 3$ ,

消去  $c$  得:  $b = 1 - a < 1$ ,

对称轴:  $m = x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1-a}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} < \frac{1}{2}$ ,

$\because A(-1, 2)$ ,  $a > 0$ , 那么顶点的纵坐标为函数的最小值,

$\therefore n \leq 2$ ,

故 B 错.

故选: B.

**二、填空题 (本题共 8 小题, 每题 3 分, 共 24 分)**

11. (3分) 计算:  $3a - (2a - 1) = \underline{a+1}$ .

**【解答】**解: 原式  $= 3a - 2a + 1 = a + 1$ ,

故答案为:  $a + 1$ .

12. (3分) 据民政部网站消息, 截至 2014 年底, 我国 60 岁以上老年人口已经达到 2.12 亿, 其中 2.12 亿用科学记数法表示为  $\underline{2.12 \times 10^8}$ .

**【解答】**解: 2.12 亿  $= 212000000 = 2.12 \times 10^8$ ,

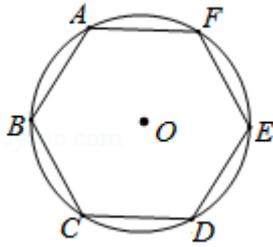
故答案为:  $2.12 \times 10^8$ .

13. (3分) 从 1, 2, 3...99, 100 个整数中, 任取一个数, 这个数大于 60 的概率是  $\underline{0.4}$ .

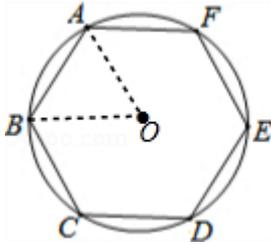
**【解答】**解: 从 1, 2, 3...99, 100 个整数中, 任取一个数, 这个数大于 60 的概率  $= \frac{40}{100} = 0.4$ .

故答案为 0.4.

14. (3分) 如图, 正六边形  $ABCDEF$  内接于半径为 3 的圆  $O$ , 则劣弧  $AB$  的长度为  $\underline{\pi}$ .



【解答】解：如图，连接  $OA$ 、 $OB$ ，



$\because ABCDEF$  为正六边形，

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ \times \frac{1}{6} = 60^\circ,$$

$$\widehat{AB} \text{ 的长为 } \frac{60\pi \cdot 3}{180} = \pi.$$

故答案为： $\pi$ 。

15. (3分) 分解因式：  $(x - 8)(x + 2) + 6x = \underline{(x + 4)(x - 4)}$ 。

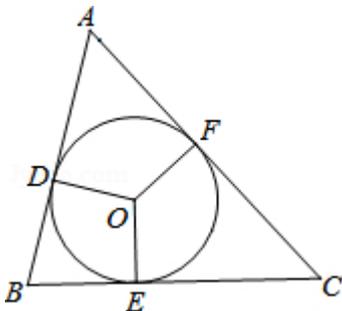
【解答】解：原式  $= x^2 + 2x - 8x - 16 + 6x$

$$= x^2 - 16$$

$$= (x + 4)(x - 4),$$

故答案为：  $(x + 4)(x - 4)$ 。

16. (3分)  $\triangle ABC$  的内切圆的三个切点分别为  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ， $\angle A = 75^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，则圆心角  $\angle EOF = \underline{120}$  度。



【解答】解： $\because \angle A = 75^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ$$

$$= 105^\circ - 45^\circ$$

$=60^\circ$

$\because \triangle ABC$  的内切圆的三个切点分别为  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ,

$\therefore \angle OEC = \angle OFC = 90^\circ$  ,

$\because$  四边形  $OEFC$  的内角和等于  $360^\circ$  ,

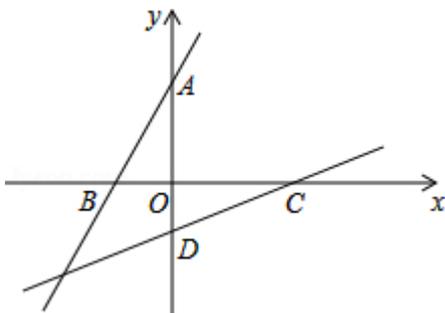
$\therefore \angle EOF = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ)$

$= 360^\circ - 240^\circ$

$= 120^\circ$

故答案为: 120.

17. (3分) 已知  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  是平面坐标系中坐标轴上的点, 且  $\triangle AOB \cong \triangle COD$ . 设直线  $AB$  的表达式为  $y_1 = k_1x + b_1$ , 直线  $CD$  的表达式为  $y_2 = k_2x + b_2$ , 则  $k_1 \cdot k_2 = \underline{1}$ .



**【解答】** 解: 设点  $A(0, a)$ 、 $B(b, 0)$ ,

$\therefore OA = a, OB = -b,$

$\because \triangle AOB \cong \triangle COD,$

$\therefore OC = a, OD = -b,$

$\therefore C(a, 0), D(0, b),$

$\therefore k_1 = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{-b}, k_2 = \frac{OD}{OC} = \frac{-b}{a},$

$\therefore k_1 \cdot k_2 = 1,$

故答案为: 1.

18. (3分) 已知点  $P$  是  $\triangle ABC$  内一点, 且它到三角形的三个顶点距离之和最小, 则  $P$  点叫  $\triangle ABC$  的费马点 (Fermat point). 已经证明: 在三个内角均小于  $120^\circ$  的  $\triangle ABC$  中, 当  $\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$  时,  $P$  就是  $\triangle ABC$  的费马点. 若点  $P$  是腰长为  $\sqrt{2}$  的等腰直角三角形  $DEF$  的费马点, 则  $PD + PE + PF = \underline{\sqrt{3} + 1}$ .

**【解答】** 解: 如图: 等腰  $\text{Rt}\triangle DEF$  中,  $DE = DF = \sqrt{2},$

过点  $D$  作  $DM \perp EF$  于点  $M$ , 过  $E$ 、 $F$  分别作  $\angle MEP = \angle MFP = 30^\circ,$

则  $EM=DM=1$ ,

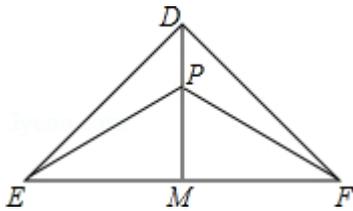
故  $\cos 30^\circ = \frac{EM}{EP}$ ,

解得:  $PE=PF=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 则  $PM=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

故  $DP=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

则  $PD+PE+PF=2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}+1$ .

故答案为:  $\sqrt{3}+1$ .



三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 66 分)

19. (6分) 计算:  $\sqrt{9} + (-1)^{2016} - 4\cos 60^\circ$ .

**【解答】** 解: 原式  $= 3 + 1 - 2 = 2$ .

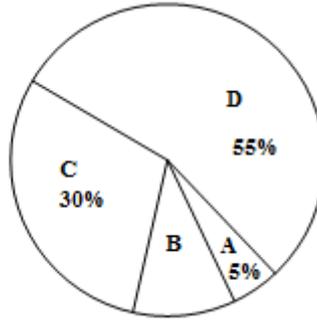
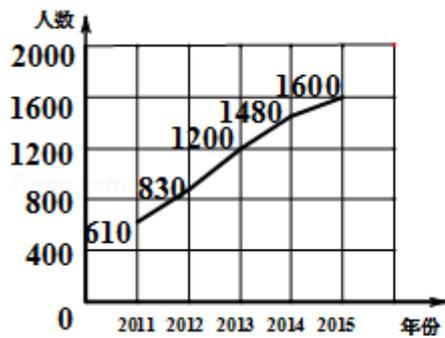
20. (6分) 先化简, 再求值:  $(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}) \cdot \frac{x^2-4}{2}$ , 其中  $x=3$ .

**【解答】** 解:  $(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}) \cdot \frac{x^2-4}{2}$   
 $= \frac{2}{x(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{2}$   
 $= \frac{x-2}{x}$ ,

当  $x=3$  时, 原式  $= \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$ .

21. (8分) 某社区从 2011 年开始, 组织全民健身活动, 结合社区条件, 开展了广场舞、太极拳、羽毛球和跑步四个活动项目, 现将参加项目活动总人数进行统计, 并绘制成每年参加总人数折线统计图和 2015 年各活动项目参与人数的扇形统计图, 请你根据统计图解答下列题

- (1) 2015 年比 2011 年增加 990 人;
- (2) 请根据扇形统计图求出 2015 年参与跑步项目的人数;
- (3) 组织者预计 2016 年参与人员人数将比 2015 年的人数增加 15%, 各活动项目参与人数的百分比与 2016 年相同, 请根据以上统计结果, 估计 2016 年参加太极拳的人数.



A: 羽毛球  
B: 太极拳  
C: 广场舞  
D: 跑步

**【解答】**解: (1)  $1600 - 610 = 990$  (人);

故答案为: 990 人;

(2)  $1600 \times 55\% = 880$  (人);

答: 2015 年参与跑步项目的人数为 880 人;

(3)  $1600 \times (1 + 15\%) \times (1 - 55\% - 30\% - 5\%) = 184$  (人);

答: 估计 2016 年参加太极拳的人数为 184 人.

22. (8 分) 某市对初二综合素质测评中的审美与艺术进行考核, 规定如下: 考核综合评价得分由测试成绩 (满分 100 分) 和平时成绩 (满分 100 分) 两部分组成, 其中测试成绩占 80%, 平时成绩占 20%, 并且当综合评价得分大于或等于 80 分时, 该生综合评价为 A 等.

(1) 孔明同学的测试成绩和平时成绩两项得分之和为 185 分, 而综合评价得分为 91 分, 则孔明同学测试成绩和平时成绩各得多少分?

(2) 某同学测试成绩为 70 分, 他的综合评价得分有可能达到 A 等吗? 为什么?

(3) 如果一个同学综合评价要达到 A 等, 他的测试成绩至少要多少分?

**【解答】**解: (1) 设孔明同学测试成绩为  $x$  分, 平时成绩为  $y$  分, 依题意得:

$$\begin{cases} x + y = 185 \\ 80\%x + 20\%y = 91 \end{cases}$$

解之得:  $\begin{cases} x = 90 \\ y = 95 \end{cases}$

答: 孔明同学测试成绩为 90 分, 平时成绩为 95 分;

(2) 由题意可得:  $80 - 70 \times 80\% = 24$ ,

$24 \div 20\% = 120 > 100$ , 故不可能.

(3) 设平时成绩为满分, 即 100 分, 综合成绩为  $100 \times 20\% = 20$ ,

设测试成绩为  $a$  分, 根据题意可得:  $20 + 80\%a \geq 80$ ,

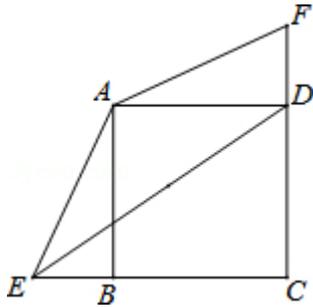
解得:  $a \geq 75$

答: 他的测试成绩应该至少为 75 分.

23. (8分) 已知正方形  $ABCD$  中,  $BC=3$ , 点  $E$ 、 $F$  分别是  $CB$ 、 $CD$  延长线上的点,  $DF=BE$ , 连接  $AE$ 、 $AF$ , 过点  $A$  作  $AH \perp ED$  于  $H$  点.

(1) 求证:  $\triangle ADF \cong \triangle ABE$ ;

(2) 若  $BE=1$ , 求  $\tan \angle AED$  的值.



**【解答】**解: (1) 正方形  $ABCD$  中,

$\therefore AD=AB, \angle ADC=\angle ABC=90^\circ$ ,

$\therefore \angle ADF=\angle ABE=90^\circ$ ,

在  $\triangle ADF$  与  $\triangle ABE$  中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle ADF = \angle ABE, \\ DF = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABE$ ;

(2) 过点  $A$  作  $AH \perp DE$  于点  $H$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $\therefore AB=BC=3$ ,

$\therefore BE=1$ ,

$\therefore AE=\sqrt{10}, ED=\sqrt{CD^2+CE^2}=5$ ,

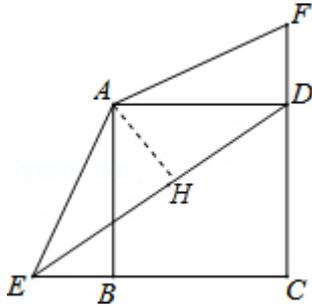
$\therefore S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AD \times BA=\frac{9}{2}$ ,

$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}ED \times AH=\frac{9}{2}$ ,

解出  $AH=1.8$ ,

在  $\text{Rt}\triangle AHE$  中,  $EH=2.6$ ,

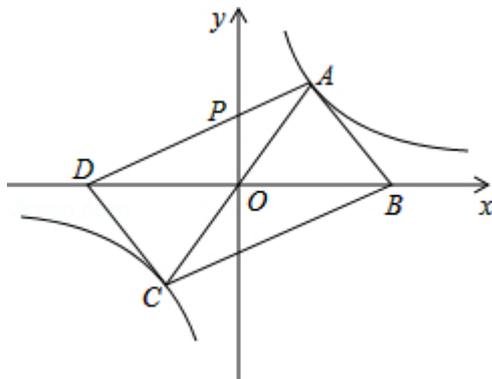
$\therefore \tan \angle AED=\frac{AH}{EH}=\frac{1.8}{2.6}=\frac{9}{13}$ .



24. (8分) 平行四边形  $ABCD$  的两个顶点  $A$ 、 $C$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 图象上, 点  $B$ 、 $D$  在  $x$  轴上, 且  $B$ 、 $D$  两点关于原点对称,  $AD$  交  $y$  轴于  $P$  点

(1) 已知点  $A$  的坐标是  $(2, 3)$ , 求  $k$  的值及  $C$  点的坐标;

(2) 在 (1) 的条件下, 若  $\triangle APO$  的面积为 2, 求点  $D$  到直线  $AC$  的距离.



**【解答】** 解: (1)  $\because$  点  $A$  的坐标是  $(2, 3)$ , 平行四边形  $ABCD$  的两个顶点  $A$ 、 $C$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$

( $k \neq 0$ ) 图象上, 点  $B$ 、 $D$  在  $x$  轴上, 且  $B$ 、 $D$  两点关于原点对称,

$$\therefore 3 = \frac{k}{2}, \text{ 点 } C \text{ 与点 } A \text{ 关于原点 } O \text{ 对称,}$$

$$\therefore k = 6, C(-2, -3),$$

即  $k$  的值是 6,  $C$  点的坐标是  $(-2, -3)$ ;

(2) 过点  $A$  作  $AN \perp y$  轴于点  $N$ , 过点  $D$  作  $DM \perp AC$ , 如图,

$$\because \text{点 } A(2, 3), k = 6,$$

$$\therefore AN = 2,$$

$$\because \triangle APO \text{ 的面积为 } 2,$$

$$\therefore \frac{OP \cdot AN}{2} = 2,$$

$$\text{即 } \frac{OP \cdot 2}{2} = 2, \text{ 得 } OP = 2,$$

$$\therefore \text{点 } P(0, 2),$$

设过点  $A(2, 3)$ ,  $P(0, 2)$  的直线解析式为  $y = kx + b$ ,

$$\begin{cases} 2k + b = 3 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k = 0.5 \\ b = 2 \end{cases},$$

∴过点  $A(2, 3)$ ,  $P(0, 2)$  的直线解析式为  $y = 0.5x + 2$ ,

当  $y = 0$  时,  $0 = 0.5x + 2$ , 得  $x = -4$ ,

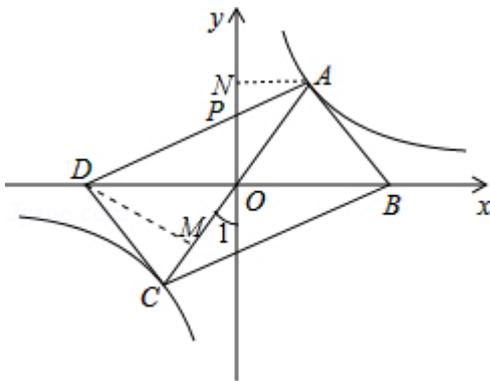
∴点  $D$  的坐标为  $(-4, 0)$ ,

设过点  $A(2, 3)$ ,  $C(-2, -3)$  的直线解析式为  $y = mx + b$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} 2m + n = 3 \\ -2m + n = -3 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} m = 1.5 \\ n = 0 \end{cases},$$

∴过点  $A(2, 3)$ ,  $C(-2, -3)$  的直线解析式为  $y = 1.5x$ ,

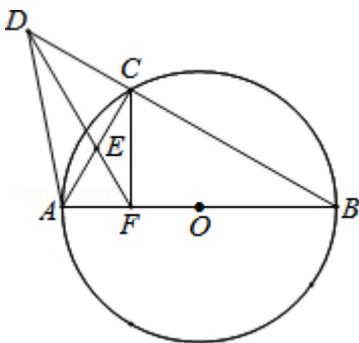
∴点  $D$  到直线  $AC$  的直线得距离为:  $\frac{|1.5 \times (-4) - 0|}{\sqrt{1.5^2 + (-1)^2}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$ .



25. (10分) 已知  $AB$  是半径为 1 的圆  $O$  直径,  $C$  是圆上一点,  $D$  是  $BC$  延长线上一点, 过点  $D$  的直线交  $AC$  于  $E$  点, 且  $\triangle AEF$  为等边三角形

(1) 求证:  $\triangle DFB$  是等腰三角形;

(2) 若  $DA = \sqrt{7}AF$ , 求证:  $CF \perp AB$ .



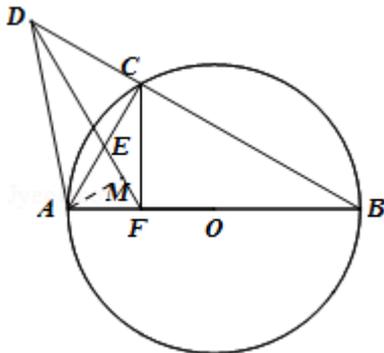
**【解答】** 解: (1) ∵  $AB$  是  $\odot O$  直径,

∴  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

∵  $\triangle AEF$  为等边三角形,

$\therefore \angle CAB = \angle EFA = 60^\circ$   
 $\therefore \angle B = 30^\circ$  ,  
 $\therefore \angle EFA = \angle B + \angle FDB$ ,  
 $\therefore \angle B = \angle FDB = 30^\circ$  ,  
 $\therefore \triangle DFB$  是等腰三角形;

(2) 过点  $A$  作  $AM \perp DF$  于点  $M$ , 设  $AF = 2a$ ,  
 $\therefore \triangle AEF$  是等边三角形,  
 $\therefore FM = EM = a, AM = \sqrt{3}a$ ,  
 在  $\text{Rt}\triangle DAM$  中,  $AD = \sqrt{7}AF = 2\sqrt{7}a, AM = \sqrt{3}a$ ,  
 $\therefore DM = 5a$ ,  
 $\therefore DF = BF = 6a$ ,  
 $\therefore AB = AF + BF = 8a$ ,  
 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle B = 30^\circ, \angle ACB = 90^\circ, \therefore AC = 4a$ ,  
 $\therefore AE = EF = AF = 2a$ ,  
 $\therefore CE = AC - AE = 2a$ ,  
 $\therefore \angle ECF = \angle EFC$ ,  
 $\therefore \angle AEF = \angle ECF + \angle EFC = 60^\circ$  ,  
 $\therefore \angle CFE = 30^\circ$  ,  
 $\therefore \angle AFC = \angle AFE + \angle EFC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$  ,  
 $\therefore CF \perp AB$ .

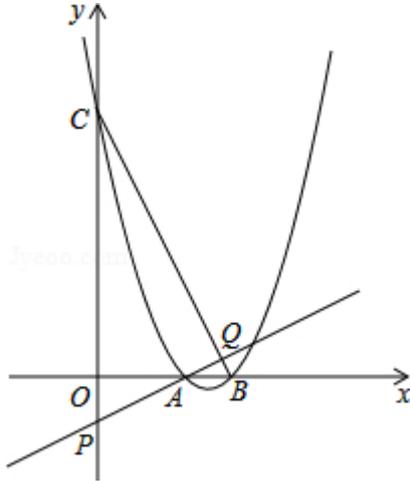


26. (12分) 已知二次函数  $y = x^2 - (2k+1)x + k^2 + k$  ( $k > 0$ )

(1) 当  $k = \frac{1}{2}$  时, 求这个二次函数的顶点坐标;

(2) 求证: 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0$  有两个不相等的实数根;

(3) 如图, 该二次函数与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点 ( $A$  点在  $B$  点的左侧), 与  $y$  轴交于  $C$  点,  $P$  是  $y$  轴负半轴上一点, 且  $OP=1$ , 直线  $AP$  交  $BC$  于点  $Q$ , 求证:  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AQ^2}$ .



**【解答】** 解: (1) 将  $k = \frac{1}{2}$  代入二次函数可求得,

$$y = x^2 - 2x + \frac{3}{4}$$

$$= (x - 1)^2 - \frac{1}{4},$$

故抛物线的顶点坐标为:  $(1, -\frac{1}{4})$ ;

(2)  $\because$  一元二次方程  $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0$ ,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2k+1)]^2 - 4(k^2 + k) = 1 > 0,$$

$\therefore$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0$  有两个不相等的实数根;

(3) 由题意可得: 点  $P$  的坐标为  $(0, -1)$ ,

$$\text{则 } 0 = x^2 - (2k+1)x + k^2 + k$$

$$0 = (x - k - 1)(x - k),$$

故  $A(k, 0)$ ,  $B(k+1, 0)$ ,

当  $x=0$ , 则  $y=k^2+k$ ,

故  $C(0, k^2+k)$

则  $AB = k+1 - k = 1$ ,  $OA = k$ ,

可得

$$y_{PA} = \frac{1}{k}x - 1,$$

$$y_{BC} = -kx + k^2 + k,$$

$$\text{当 } \frac{1}{k}x - 1 = -kx + k^2 + k,$$

$$\text{解得: } x = k + \frac{k^2}{k^2 + 1},$$

$$\text{则代入原式可得: } y = \frac{k}{k^2 + 1},$$

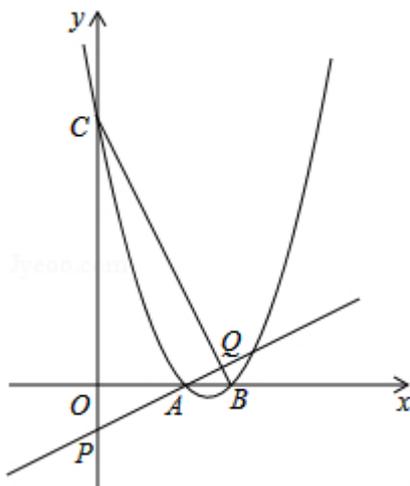
$$\text{则点 } Q \text{ 坐标为 } \left(k + \frac{k^2}{k^2 + 1}, \frac{k}{k^2 + 1}\right)$$

$$\text{运用距离公式得: } AQ^2 = \left(\frac{k^2}{k^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{k}{k^2 + 1}\right)^2 = \frac{k^2}{k^2 + 1},$$

$$\text{则 } OA^2 = k^2, AB^2 = 1,$$

$$\text{故 } \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{k^2} + 1 = \frac{1+k^2}{k^2} = \frac{1}{AQ^2},$$

$$\text{则 } \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AQ^2}.$$



关注“数学吧”公众号，海量免费试卷下载！

